MATEMATIKA 11-12

Bendrasis kursas. MOKYTOJO KNYGA






MATEMATIKA 11-12

Bendrasis kursas

MOKYTOJO KNYGA

TEV

VILNIUS 2007

UDK 372.851
Kn42

Mokytojo knygą rengė Jolanta Knyvienė, Milda Vosylienė, Elmundas Žalys

Redaktorius *Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Tekstą rinko ir maketavo *Aldona Žalienė*

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 978–9955–680–88–8

TURINYS

1. AIBĖS

2. REIŠKINIAI

3. FUNKCIJOS

4. LYGTYS, LYGČIŲ SISTEMOS

5. NELYGYBĖS

6. LAIPSNINĖ FUNKCIJA

7. RODIKLINĖ FUNKCIJA

8. LOGARITMINĖ FUNKCIJA

MIELI MOKYTOJAI!

Jūsų rankose paskutinė „mėlynosios“ TEV „Matematikos“ serijos mokytojo knyga. Palyginę su ankstesnėmis išplėstinio kurso mokytojų knygomis, turėtumėte pajusti, kad ji yra šiek tiek „lengvesnė“, gal paprastesnė. Ją greičiau būtų galima vadinti mokytojo pagalbininke nei mokytojo knyga.

Joje, pavyzdžiui, nerasite rekomendacijų, kaip kursą išdėstyti pamokomis, nepateikiame programos — tikimės, kad mokytojai su ja susipažinę (juk vadovėlis mokyklose jau nuo 2004 metų). Be to, programos nuolat keičiamos.

Pripratusiems prie TEV rengtų mokytojo knygų, kris į akis tai, kad šioje nėra plačių teorinių samprotavimų ir metodinių patarimų mokytojams. Viena vertus, geriau, nei tai padarė Vilius Stakėnas, mes parašyti nesitikėjome. Kita vertus, paprastai baigiamosiose klasėse dirba jau prityrę mokytojai, kurie turi susiformavusias pažiūras į vieną ar kitą matematikos mokymo aspektą. Ir jokie pamokymai prabėgomis tų pažiūrų iš esmės nepakeis. O norintiems pagilinti savo žinias nuoširdžiai rekomenduojame bent pavartyti išplėstinio kurso vadovėlių „Matematika 11“ ir „Matematika 12“ mokytojo knygas.

Rašant šią knygą, pagrindinis autorių tikslas buvo padėti mokytojui taupyti laiką, išvaduoti jį nuo (kartais) ilgų ir varginančių aritmetinių skaičiavimų, nuo galimų klaidų. Stengėmės nepiršti savo nuomonės — visos pastabos yra labiau patariamosios nei metodologinės.

Pagrindinis akcentas knygoje skiriamas uždavinių sprendimui. Visi jie buvo dar kartą perspręsti, deja, ne visi po du kartus. Todėl, jei rasite klaidelių ar netikslumų, prašome nepasididžiuoti ir parašyti autoriams (leidyklos adresu). Aktyviausius kritikus paskatinsime naujais TEV leidiniais, kuriuose, tikimės, naujų klaidų nebebus.

Spręsdami ir aprašydami uždavinius laikėmės tokių principų:

- visiškai lengvų ar lengvai sprendžiamų uždavinių — nurodyti tik atsakymus;
- vieno tipo ar panašių uždavinių — pateikti tik vieno kito sprendimus, likusiųjų — tik atsakymus;
- „spalvotų“ ar sunkesnių (mūsų požiūriu) uždavinių — pateikti išsamesnius sprendimus; kai kur gal net erzins nuoseklūs skaičiavimo veiksmai — bet pripažinkite, kartais patogu turėti po ranka tokią „paruoštukę“.
- prie kai kurių uždavinių yra pastabos, patarimai mokytojams ar priminimai — jų tikrai nedaug ir jie atspindi tam tikrus išskirtinius momentus.

Knygos pabaigoje pridėjome porą galimų kontrolinių darbų variantų. Jie rengti atsižvelgiant į ankstesnių metų mokyklinio egzamino užduotis, bet, žinoma, gali nieko bendro neturėti su būsimosiomis užduotimis. Tiesiog tai vienas iš būtų patikrinti mokinių pasirengimą baigiamajam egzaminui. Manytume, kad pagal šiuos pavyzdžius kiekvienas mokytojas gali parengti ir daugiau kontrolinių užduočių rinkinių.

Linkime sėkmės ir tikimės, kad ši knyga kažkiek palengvins Jūsų darbą!

AUTORIAI

1. Aibės

1.1. Aibių sąjunga ir sankirta

Aiškinamąjį skyrelio tekstą galima skirti savarankiškam nagrinėjimui. Sprendžiant 2–6, 10, 11 užduotis, pakartojama geometrijos medžiaga.
Mokiniai turėtų:

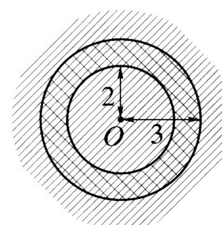
- *išsiaiškinti*, kaip matematikoje suprantama aibė, pateikti įvairių aibių pavyzdžių;
- paprasčiausiais atvejais *nusakyti* žodžiais ir užrašyti, panaudodami simbolius, aibių sąjungą ir sankirtą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 1–4, 9, 10.
Vidutinis lygmuo: 5, 6.
Aukštesnysis lygmuo: 7, 8, 11.

1. **a)** Visos savaitės dienos; **b)** savaitgalio dienos; **c)** daugiakampių aibė; **d)** natūraliųjų skaičių aibė; **e)** tuščia aibė.

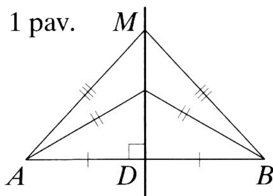
2. **d)** Kur yra taškai nuo vieno kurio nors taško nutolę atstumu, ne didesniu negu 3 cm (t. y. lygiai per 3 cm arba arčiau) ir ne mažesniu negu 2 cm (t. y. lygiai per 2 cm arba toliau), matome nusibraižę du koncentrinius apskritimus, kurių spinduliai 2 cm ir 3 cm.



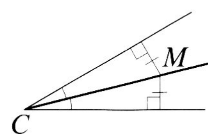
1) Iš taško O, kaip centro, brėžiame apskritimą, kurio spindulys 3 cm. Visi taškai ant apskritimo ir jo viduje bus ne toliau kaip per 3 cm nuo taško O. (Užbrūkšniuojama viena kryptimi.)
2) Iš to paties taško O brėžiame apskritimą, kurio spindulys 2 cm. Visi taškai ant apskritimo ir jo išorėje bus nutolę nuo O atstumu ne mažesniu negu 2 cm. (Užbrūkšniuojama kita kryptimi.)
3) Abi sąlygas tenkina taškai esantys žiede ir ant apskritimų. (Užbrūkšniuojama abiem kryptimis).
Atsakymai.
a) Taškai, vienodu atstumu nutolę nuo atkarpos galų yra atkarpos vidurio statmenyje (MD) (žr. 1 pav.).

Priminkite mokiniams, kaip atkarpos vidurio statmuo ir pusiaukampinė brėžiami skriestuvu ir liniuote.

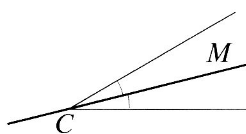
1 pav.



2 pav.

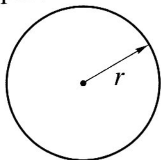


3 pav.

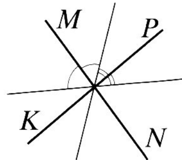


b) Taškai, vienodu atstumu nutolę nuo abiejų kampo kraštinių yra to kampo pusiaukampinėje (CM) (žr. 2 pav.). Stipresnieji mokiniai turėtų nurodyti tikslesnį atsakymą: ... *yra tiesėje, einančioje per kampo pusiaukampinę.* (žr. 3 pav.)
c) Taškai, vienodu atstumu (r) nutolę nuo kurio nors taško, yra ant apskritimo, kurio centras ir yra nurodytas taškas (žr. 4 pav.).

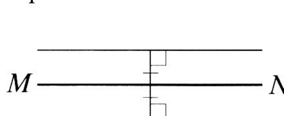
4 pav.



5 pav.



6 pav.



e) Tų tiesių sudaromų kampų pusiaukampinių (MN ir PK) taškai (žr. 5 pav.).
f) Tiesė, lygiagreti duotosioms tiesėms, ir vienodai nuo jų nutolusi (MN) (žr. 6 pav.).

3. Pasinaudokite 2 uždavinio atsakymais: **3a)** $\to$ **2a)**, **3b)** $\to$ **2b)**, **3c)** $\to$ **2c)**.

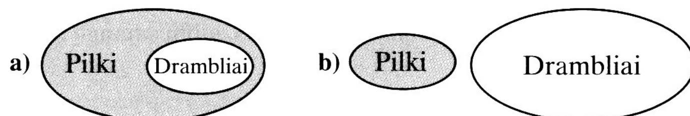
Prieš sprendžiant 4–6 uždavinius, ***priminkite mokiniams*** juose minimų geometrinių figūrų apibrėžimus.

4. **a)** Taip; **b)** ne; **c)** taip; **d)** ne.

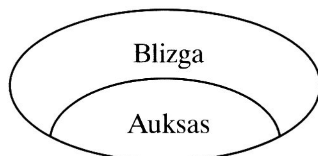
5. **a)** Taip; **b)** ne, nes lygiašonio trikampio dvi kraštinės lygios, o lygiakraščio lygios visos trys kraštinės; **c)** taip, nes stačiakampis yra keturkampis; **d)** ne, nes kvadratų aibei priklauso tik tie stačiakampiai, kurių visos kraštinės lygios; **e)** taip, nes kvadratų kampai statūs, todėl visi kvadratai yra stačiakampiai.

6. **a)** Ne; **b)** taip — kvadratai; **c)** taip – statūs lygiašoniai trikampiai.

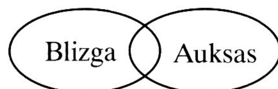
7.



8. Tai truputėlį nematematinė užduotis. Ar auksas būtinai blizga? Matyt, galime laikyti, kad nebūtinai...
Bet čia iš teiginio:
„Ne visa auksas, kas blizga“ galima jausti, kad yra duota, jog:
„Kas auksas — tas blizga“, bet: „Kas blizga — tai nebūtinai auksas“.
Todėl, atmesdami filosofiją, jog auksas gali ir neblizgėti, gauname:



Bet jei laikysime, kad auksas gali ir neblizgėti turėtume:

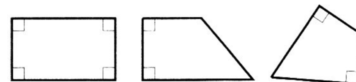


Iš antrojo šio vadovėlio klausimo aišku, kad iš pateiktų atsakymų gali būti teisingas tik vienas. Nesunku susigaudyti, kad autoriai teisingu laiko atsakymą **C**.

9. **a)** $A \cup B = \{v,a,r,š,k,ė,t,i,s\}$, $A \cap B = \{r,ė\}$;
b) $A \cup B = \{s,a,l,d,u,k,r,t,\}$, $A \cap B = \{a,u\}$;
c) $A \cup B = \{k,o,v,a,s,u,p,ė\}$, $A \cap B = \varnothing$.

10. **a)** Atkarpa BC; **b)** spindulys AD; **c)** taškas B; **d)** visa tiesė a; **e)** tuščia aibė; **f)** visa tiesė a.

Pasiūlykite mokiniams nusibraižyti bent po kelis kiekvienos aibės elementus.



11. **a)** $A \cap B$ — stačiosios trapecijos (nes jos yra keturkampiai): $A \cap C$ — visi stačiakampiai (nes jie yra keturkampiai ir turi daugiau kaip du stačius kampus): $A \cap D$ — rombai, kurių kampai statūs, t. y. kvadratai: $A \cap E$ — lygiagretainiai, kurių kampai statūs, t. y. stačiakampiai: $A \cap F$ — tuščia aibė, nes nėra trikampių, kurie turėtų du stačiuosius kampus;
b) Aibę $A \cup B$ galima nusakyti taip: 1) keturkampiai, turintys bent du stačiuosius kampus ir visos nestačiosios trapecijos (stačiosios jau įeina į keturkampių, turinčių bent du stačiuosius kampus aibę); 2) stačiakampiai, stačiosios trapecijos ir keturkampiai, kurių du priešingieji kampai yra statūs (žr. pav. dešinėje); $A \cup C$ — keturkampiai, turintys bent du stačiuosius kampus (stačiakampiai jau įeina į aibę A): $A \cup D$ — keturkampiai, turintys bent du stačiuosius kampus ir rombai, neturintys stačiųjų kampų: $A \cup E$ — keturkampiai, turintys bent du stačiuosius kampus ir lygiagretainiai, neturintys stačiųjų kampų, $A \cup F$ — keturkampiai, turintys bent du stačiuosius kampus ir statieji trikampiai;
c) Bendrų elementų neturi: 1) keturkampių ir trikampių aibės: A ir F; B ir F; C ir F; D ir F; E ir F; 2) trapecijų ir lygiagretainių aibės: B ir C; B ir D; B ir E.

1.2. Skaičių aibės

Skyrelyje pateikiama medžiaga mokiniams nėra nauja, bet pakartoti reikia nemažai sąvokų ir procedūrų. Prie uždavinių pateiktą teoriją mokiniai gali nagrinėti savarankiškai.

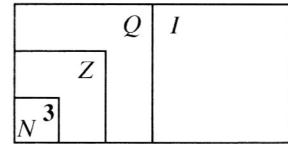
Mokiniai turėtų:

- *žinoti*, kas yra skaičiaus kartotiniai ir dalikliai, kurie skaičiai yra lyginiai, kurie nelyginiai, kurie pirminiai, kaip išskaidyti skaičių pirminiais dauginamaisiais;
- *mokėti* užrašyti skaičius standartiniu pavidalu, skyrių suma, parašyti kelis skaičiaus kartotinius ir daliklius, palyginti, suapvalinti nurodytu tikslumu realiuosius skaičius, apskaičiuoti skaičiaus procentus;
- *suvokti* realiųjų skaičių aibės struktūrą, *gebėti* pateikti pavyzdžių skaičių, priklausančių vienai ar kelioms aibėms ir nepriklausančių kitoms skaičių aibėms.

Pvz. $\mathbf{3} \in N$, $\mathbf{3} \in Z$, $\mathbf{3} \in Q$, $\mathbf{3} \in R$, bet $\mathbf{3} \notin I$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 12, 13, 16, 20, 25, 26a,c,d, 27a, 28, 31, 33, 35, 36, 40–43a, 45, 48.
Vidutinis lygmuo: 14, 15, 17, 18, 21–24, 26b, 27b, 29, 30, 32, 34, 37, 39, 41d–f, 43b,c, 46a.
Aukštesnysis lygmuo: 44, 46b, 47.



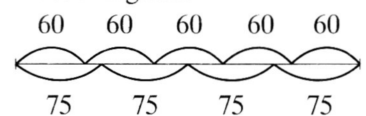
N — natūraliųjų skaičių aibė
Z — sveikųjų skaičių aibė
Q — racionaliųjų skaičių aibė
I — iracionaliųjų skaičių aibė
$Q \cup I$ — realiųjų skaičių aibė (žymima R)

12. **1)** **a)** $10 \cdot 5 + 1$; **b)** $10 \cdot 9 + 0$; **c)** $100 \cdot 9 + 10 \cdot 5 + 7$; **d)** $100 \cdot 9 + 10 \cdot 0 + 3$; **e)** $10000 \cdot 1 + 1000 \cdot 0 + 100 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 1$; **f)** $100000000 \cdot 1 + 10000000 \cdot 2 + 1000000 \cdot 3 + 100000 \cdot 4 + 10000 \cdot 5 + 1000 \cdot 6 + 100 \cdot 7 + 10 \cdot 8 + 9$;
2) $\overline{cba} = 100c + 10b + a$.

13. **f)** Surašome kartotinių aibės pirmuosius elementus didėjimo tvarka:
6 kartotiniai $= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, ...\}$;
5 kartotiniai $= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, ...\}$;
4 kartotiniai $= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, ...\}$.
4 ir 5 kartotinius pabraukėme vienu brūkšniu, o 5 ir 6 kartotinius — dviem brūkšniais. Skaičius, kuris pabrauktas trim brūkšniais, yra visų trijų skaičių kartotinis. Toks yra skaičius 60.
Atsakymai. **a)** $\{4, 8, 12, 16, \ldots\}$, $4n$, kai $n \in N$;
b) $\{6, 12, 18, 14, \ldots\}$, $6n$, kai $n \in N$;
c) $\{20, 40, 60, 80, \ldots\}$, $20n$, kai $n \in N$;
d) ir **e)** $\{12, 24, \ldots\}$, $12n$, kai $n \in N$;
f) $\{60, 120, 180, ...\}$, $60n$, kai $n \in N$.

14. Nusibraižykime brėžinį ir išsirašykime atstumus, kuomet žingsniai sutampa.
a) Po 1, 2, 3, 4, ... žingsnių Arnas bus nužengęs: 75, 150, 225, 300, 375, 450, 525, 600, 675, ... centimetrų, Rūta — 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, ... centimetrų (pasikartojančius atstumus pabraukėme).
b) Pirmą kartą žingsniai sutaps, kai abu nueis po 300 cm. Arnas nužengs $300 : 75 = 4$ žingsnius, Rūta — $300 : 60 = 5$ žingsnius.
Atsakymai. **a)** Žingsniai sutaps kas 300 cm = 3 m; **b)** 4 ir 5.

Rūtos žingsniai



Arno žingsniai

15. **a)** po 120 d.; **b)** kas 20 m; kas 12 m.

16. **1)** Iš 2 dalijasi skaičiai 102, 104, 116, 150, 258, 260, 396, 111 222, 1 112 220. Iš šių lyginių skaičių išrenkame tuos, kurie dalijasi iš 3: 102, 150, 258, 396, 111 222, 1 112 220, tai ir yra dalūs iš 6 skaičiai.
Atsakymai. **1)** **a)** 102, 104, 116, 150, 258, 260, 396, 111 222, 1 112 220;
b) 102, 150, 258, 333, 396, 111 111, 111 222, 1 112 220;
c) 104, 116, 260, 396, 1 112 220;
d) 150, 260, 1 111 115, 1 112 220;
e) 102, 150, 258, 396, 111 222, 1 112 220;
f) 333, 396, 111 222, 1 112 220;
g) 150, 260, 1 112 220.
2) Nelyginius skaičius galime užrašyti $2n + 1$, čia $n = 0, 1, 2, \ldots$, arba $2n - 1$, čia $n \in N$.

Priminkite mokiniams
dalumo iš 2, 3, 5, 10 požymius.
Dalumo iš 4 požymis:
skaičiaus paskutiniųjų dviejų skaitmenų sudaromas skaičius dalijasi iš 4 arba tie skaitmenys yra 0.
Dalumo iš 6 požymis:
skaičius dalijasi ir iš 2, ir iš 3.

Pastaba
16 uždavinio punkte 2) įsivėlė rašybos klaida: turi būti žodis „lyginius“. Atsiprašome.

17. **c)** Visi natūralieji skaičiai dalijasi iš 1. Kad skaičius dalytųsi iš 2, iš 3 ir iš 5 — (pirminiai skaičiai), jis turi būti lygus $2 \cdot 3 \cdot 5$ sandaugai, kad dalytųsi iš $4 = 2 \cdot 2$, reikia dar vieno dauginamojo 2. Skaičius $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ dalysis ir iš 6, nes jis dalus ir iš 2, ir iš 3.
Atsakymai. **a)** 6; **b)** 12; **c)** 60; **d)** 2520.

18. Aišku, kad $15 = 3 \cdot 5$, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, 100 ir 102 dalijasi iš 2. Pasinaudodami patarimu vadovėlyje: pakanka dalyti iš skaičių ne didesnių kaip pusė nagrinėjamo skaičiaus, ištiriame kitus skaičius. Tikriname ar 103 yra pirminis skaičius. Dalijame iš skaičių ne didesnių kaip $103 : 2 < 52$, t. y. iš 2, 3, 4, ..., 49, 50, 51. Galima pasinaudoti skaičiuokliu, bet galima mokiniams pasiūlyti ir pamąstyti. 103 nelyginis, tai jis nesidalija iš visų lyginių skaičių (iš 4, 6, 8, ..., 44, 46, 48, 50); 103 nesidalija iš 3 (skaitmenų suma $1 + 3 = 4$ nesidalija iš 3), tai 103 nesidalija ir iš 3 kartotinių; nesidalija iš 5, tai nesidalija ir iš 5 kartotinių. Dalydami nustatome, kad 103 nesidalija iš pirminių: 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Toliau nedalijame, nes kiti skaičiai yra jau pasirinktųjų kartotiniai (44, 46, 48 ir 50 — lyginiai skaičiai, 45 — 5 kartotinis, 49 — 7 kartotinis, o 51 — 3 kartotinis). Išvada: 103 dalijasi tik iš 1 ir iš savęs, todėl jis yra pirminis skaičius. Paprasčiausia žinoma pažiūrėti į pirminių skaičių lentelę...
Atsakymas. 11, 29, 101, 103.

Pastaba
Turint laiko ir norint, kad mokiniams būtų vaizdesnis sprendimas, galima surašyti visus skaičius ir išbraukinėti 2, 3, 5 ir t. t. kartotinius.

19. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

20. **a)** $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; **b)** $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; **c)** $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$;
d) $15912 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17$.

21. **b)** Taikome Euklido algoritmą: $48 : 30 = 1$ (liekana 18), $30 : 18 = 1$ (liekana 12), $18 : 12 = 1$ (liekana 6), $12 : 6 = 2$ (liekana 0). Paskutinė nelygi nuliui liekana 6, tai DBD(30, 48) = 6;
e) Skaičius išskaidykime pirminiais dauginamaisiais:

72	2	120	2	168	2
36	2	60	2	84	2
18	2	30	2	42	2
9	3	15	3	21	3
3	3	5	5	7	7
1		1		1	

Išrenkame visus **bendrus** skaičių daliklius: 2, 2, 2, 3.
Vadinasi, DBD(72, 120, 168) $= 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$.
Atsakymai. **a)** 12; **b)** 6; **c)** 18; **d)** 36; **e)** 24.

22. **a)** 24; **b)** 72; **c)** 216; **d)** 11695320; **e)** 2530.

23. 14 cm × 14 cm, nes 14 yra 224 ir 154 didžiausiasis bendrasis daliklis.

24. **a)** Apskaičiuojame 1 °C padalos vertę: $1\,°C = (80 : 100)\,°R = 0{,}8\,°R$,
tai $30\,°C = (30 \cdot 0{,}8)\,°R = 24\,°R$;
$1\,°C = ((212 - 32) : 100)\,°F = (180 : 100)\,°F = 1{,}8\,°F$,
tai $30\,°C = (30 \cdot 1{,}8 + 32)\,°F = 86\,°F$.
$1\,°C = ((373 - 273) : 100)\,K = (100 : 100)\,K = 1\,K$,
tai $30\,°C = (30 + 273)\,K = 303\,K$.
b) $13\,K = (-273 + 13)\,°C = -260\,°C$,
Atsakymai. **a)** 24 °R, 86 °F, 303 K; **b)** 13 K = −260 °C; **c)** $T_K = T_C + 273$, $T_C = T_K - 273$.

25. **a)** $C(2)$, $E(3)$, $G(4)$, $B(-1)$, $F(-3)$, $H(-4)$;
b) 5; 7; 131; 5; 7; 131. Teigiamojo skaičiaus modulis lygus *pačiam skaičiui*. Neigiamojo skaičiaus modulis lygus *jam priešingam skaičiui*. Priešingųjų skaičių moduliai *yra lygūs*.
c) $OG = 4$, $OF = 3$, $AE = 2$, $BH = 3$, $CD = 4$, $GF = 7$;
d) $MN = |m - n|$.

26. **b)** Randame trupmenų skirtumą:

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2) - (n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Skirtumas neigiamas, todėl antroji trupmena didesnė už pirmąją.
Galima spęsti ir taip.
Raskime, kiek trupmenos skiriasi nuo vieneto:

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1};$$

Pastaba
Norėdami išsiaiškinti, kuris skaičius a ar b didesnis, ieškome jų skirtumo. Jei $a - b > 0$, tai $a > b$, jei $a - b < 0$, tai $a < b$.

Pastaba
Prieš sprendžiant, galima palyginti kelias konkrečias tokio tipo trupmenas, pvz., $\frac{1}{2}$ ir $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ir $\frac{4}{5}$, o po to nagrinėti bendrąjį atvejį.

$$1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Todėl,

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2},$$

nes jei trupmenų skaitikliai lygūs, tai didesnė ta trupmena, kurios vardiklis mažesnis, o $n+1 < n+2$. Antroji trupmena mažiau skiriasi nuo vieneto, tai ji didesnė.

c) Trupmeną $\frac{374220}{261954}$ galima suprastinti išskaidžius jos skaitiklį ir vardiklį dauginamaisiais. Bet galima, suradus kelis bendrus daliklius, prastinti nuosekliai: nesunku pastebėti, kad šios trupmenos skaitiklis ir vardiklis dalijasi iš 2 ir iš 9, t. y. iš 18, ir t. t.

$$\frac{374220 : 18}{261954 : 18} = \frac{20790 : 9}{14553 : 9} = \frac{2310 : 3}{1617 : 3} = \frac{770 : 7}{539 : 7} = \frac{110 : 11}{77 : 11} = \frac{10}{7}.$$

Atsakymai.
a) $\frac{90}{180}$; $\frac{120}{180}$; $\frac{135}{180}$; $\frac{144}{180}$; $\frac{150}{180}$; $\frac{160}{180}$; $\frac{162}{180}$; **b)** $\frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1}$; **c)** $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{37}$; $\frac{10}{33}$; $\frac{10}{7}$;
d) 0,4; 0,75; 2,6; 0,(714285); 0,7; 5,75; 0,(009); 0,(307692); 0,01.

27. **b)** $x = 2,(7)$, $x = 2,777\ldots$, $10x = 27,777\ldots$,
$10x - x = 27,777\ldots - 2,777\ldots$, $9x = 25$, $x = 2\frac{7}{9}$;
$x = 0,9(1)$, $x = 0,9111$, $10x = 9,111\ldots$, $100x = 91,111\ldots$,
$100x - 10x = 91,111 - 9,111$, $90x = 82$, $x = \frac{41}{45}$;
$x = 0,21(34)$, $x = 0,213434\ldots$, $100x = 21,3434\ldots$, $10000x = 2134,3434\ldots$,
$10000x - 100x = 2134,3434 - 21,3434$, $9900x = 2113$, $x = \frac{2113}{9900}$.
Atsakymai. **a)** $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{999}{1000}$; $\frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$; $-\frac{31}{10} = -3\frac{1}{10}$; $-\frac{1}{100}$;
b) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $2\frac{7}{9}$; $\frac{11}{15}$; $\frac{41}{45}$; $\frac{2113}{9900}$.

Pastaba
27b) uždavinio sąlygoje paskutiniame skaičiuje trūksta kablelio, — turėtų būti 0,21(34).

28. **a)** 1% skaičiaus 20 lygus $20 : 100 = 20 \cdot 0,01 = 0,2$;
15% skaičiaus 20 lygūs $20 \cdot \frac{15}{100} = 20 \cdot 0,15 = 3$;
15% skaičiaus 75 lygus $75 \cdot \frac{15}{100} = \frac{45}{4} = 11,25$;
15% skaičiaus 110 lygus $110 \cdot \frac{15}{100} = \frac{33}{2} = 16,5$;
15% skaičiaus $\frac{3}{5}$ lygūs $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{100} = 0,09$.
15% skaičiaus $2\frac{1}{3}$ lygūs $\frac{7}{3} \cdot \frac{15}{100} = \frac{7}{20}$.
Dydžio A **p procentų** apskaičiuojame taip: dydį A dauginame iš p šimtųjų, $A \cdot \frac{p}{100}$.
b) 1‰ skaičiaus 10000 lygi $10000 \cdot \frac{1}{1000} = 10000 \cdot 0,001 = 10$;
21‰ skaičiaus lygi $10000 \cdot \frac{21}{1000} = 10000 \cdot 0,021 = 210$.
21‰ skaičiaus 2200 lygi $2200 \cdot \frac{21}{1000} = 46,2$.
11‰ skaičiaus 222 lygi $222 \cdot \frac{21}{1000} = 4,662$;
21‰ skaičiaus $\frac{15}{4}$ lygi $\frac{15}{4} \cdot \frac{21}{1000} = \frac{63}{800}$.
Dydžio A **p promilių** apskaičiuojame taip: skaičių A dauginame iš p tūkstantųjų, $A \cdot \frac{p}{1000}$.

Priminkite mokiniams
Ieškodami skaičiaus dalies, skaičių dauginame iš trupmenos reiškiančios tą dalį.

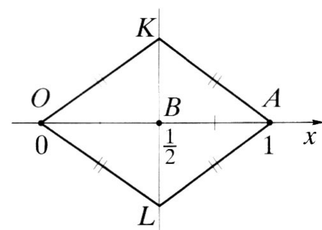
29. **b)** Jei a yra $\frac{3}{7}$ skaičiaus b, tai $b = a : \frac{3}{7} = 57 : \frac{3}{7} = 57 \cdot \frac{7}{3} = 133$ ($\frac{1}{7}$ skaičiaus b lygi $57 : 3$, o visas skaičius b yra 7 kartus didesnis, $b = \frac{57}{3} \cdot 7$ arba $a = b : \frac{3}{7}$)
Atsakymai. **a)** $a = 1029$; **b)** $b = 133$; **c)** $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$.

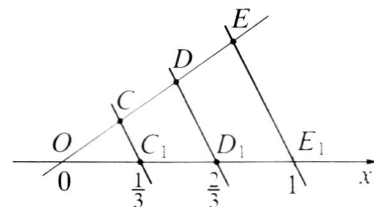
Priminkite mokiniams
Ieškodami skaičiaus, kai žinoma jo dalies reikšmė (nurodytos trupmena), tą reikšmę dalijame iš trupmenos, atitinkančios tą dalį.

30. **1)** Kai $a = 1,25b$, tai $a - b = 1,25b - b = 0,25b > 0$ (sąlygoje pasakyta, kad $b > 0$), skirtumas $a - b$ teigiamas, tai $a > b$.
2) Skaičių a gauname b padauginę iš 1,25, t. y. $a = b \cdot 1,25 = b \cdot \frac{125}{100}$ arba a yra 125% skaičiaus b. Skaičius a už b didesnis 25% = 125% − 100%. Kitaip: jei $a = b + 0,25b$, o skaičius $0,25b$ yra $\frac{25}{100}$ skaičiaus b arba 25% skaičiaus b, todėl a už b daugiau 25%.
Atsakymai. **1)** $a > b$; **2)** 25%; **3)** $a = 28,75$; **4)** $b = 8,8$.

31. **a)** Turtas po metų padidės 10% ir bus 110% pradinio turto:
$1425000 \cdot 1,1 = 1\,567\,500$ Lt;
b) Turtas po metų sumažės 10% ir bus 90% pradinio turto:
$1425000 \cdot 0,9 = 1\,282\,500$ Lt.
Atsakymai. **a)** 1 567 500 Lt; **b)** 1 282 500 Lt.

32. **a)** *Įrodymas*. Pastebėkime, kad keturkampis $OKAL$ yra rombas, visos jo kraštinės lygios, nes lankus brėžėme tuo pačiu spinduliu. Rombo įstrižainės dalija viena kitą pusiau, vadinasi, taškas B yra vienetinės atkarpos OA vidurio taškas.
b) Skaičius $1\frac{1}{2}$ bus atkarpos, kurios galai yra taškuose 1 ir 2, vidurio taške; skaičiaus $\frac{1}{4}$ vietą nustatysime atkarpą OB padaliję pusiau, o skaičiaus $\frac{3}{4}$ — padaliję atkarpą BA pusiau.
c) *Įrodymas*. Pasinaudojame Talio teorema: Jei dvi lygiagrečios tiesės CC_1 ir EE_1 kerta kampo EOE_1 kraštines, tai atkirstos atkarpos yra proporcingos: $OC : OE = OC_1 : OE_1$. Kadangi $OC : OE = \frac{1}{3}$, tai ir $OC_1 : OE_1 = \frac{1}{3}$. Iš čia gauname, kad $OC_1 = \frac{1}{3}OE_1$. Kadangi $OE_1 = 1$, tai $OC_1 = \frac{1}{3}$, ir t.t.
d) Skaičius $\frac{2}{3}$ bus taške D_1, skaičių $\frac{4}{3}$ pažymėsime 4 kartus atidėję atkarpą lygią $\frac{1}{3}$ (atkarpą OC_1). Atidedant $\frac{5}{7}$ teks spindulyje atsidėti 7-ias lygias atkarpas, o atidedant $\frac{11}{111}$ — reikės 111-os lygių atkarpų.





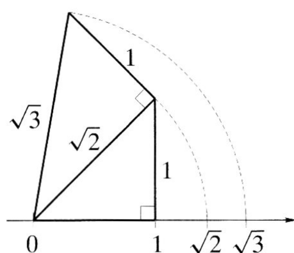
33. **1)** **a)** $5 \cdot 10^3$; **b)** $3 \cdot 10^6$; **c)** $2,7 \cdot 10^9$; **d)** $7 \cdot 10^{-2}$; **e)** $2,7 \cdot 10^{-3}$; **f)** $8,41 \cdot 10^{-11}$.
2) **a)** $4,11 \cdot 10^{16}$; **b)** $1,99 \cdot 10^{30}$; **c)** $9,11 \cdot 10^{-31}$; **d)** $1,5 \cdot 10^{-16}$; **e)** $7,5 \cdot 10^1$.
3) $x < 1$; $x \geqslant 10$; $1 \leqslant x < 10$.

34. **a)** 18 kvintilijonų 446 kvadrilijonai 744 trilijonai 73 milijardai 709 milijonai 551 tūkstantis 616;
b) **1)** gigatona — milijardas tonų; nanometras — milijardinė metro dalis; dekagramas — dešimt gramų; pikolitras — trilijoninė litro dalis;
2) **a)** 58 000 t = 58 kt; 3080 t = 3,08 kt; **b)** 200 ℓ = 2 hℓ; 3100 ℓ = 31 hℓ;
c) 0,000 000 008 m = 8 nm; 0,0005 m = 500 000 nm;
d) 2 000 000 t = 2 Mt; 4 050 000 t = 4,05 Mt.

35. Dažniau sutinkami pavyzdžiai būtų 2π; $\sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

36. Pavyzdžiui, $x^4 = 8$; $x + 2 = 2\pi$.

37.



38. **a)** Pavyzdžiui, $S_s = \pi R^2$, $C = 2\pi R$; **b)** tikslesnė $\frac{22}{7}$;
c) visi santykiai lygūs $\frac{\pi}{2}$.

39. Iracionalusis skaičius 1,112113114..., sudaromas po kablelio rašant 11, o po to skaičių 2, tada vėl 11 ir 3, vėl 11 ir 4,. . . .
Iracionalusis skaičius 2,101001000..., sudaromas po kablelio rašant 10, 100, 1000, ... Skaičius 1,123123123... nėra iracionalus, nes akivaizdus periodas (123), o skaičius 2,1010010009999... irgi ne iracionalus, nes baigiasi vien devynetais.
Atsakymas. 1,112113114... ir 2,101001000... .

40. **1)** $a > b$; **2)** $a < b$; **3)** $a = b$; **4)** $a > b$.

41. **a)** Kadangi $\frac{3}{7} > \frac{2}{7}$, tai $-\frac{2}{7} > -\frac{3}{7}$;
b) Kadangi $7 > 5$, tai $\frac{4}{5} > \frac{4}{7}$;
c) Lyginame skaičių modulius $|-0,3| < |-0,333...|$, $0,3 < 0,333...$, todėl $-0,3 > -0,(3)$;
d) Galima periodinę trupmeną pasiversti paprastąja: $x = 0,8181...$, $100x = 81,8181....$, $99x = 81$, $x = \frac{81}{99} = \frac{9}{11} = 0,(81)$; Bet galima ir 9 dalyti iš 11 ...
e) Keliame skaičius kvadratu: $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(1,41)^2 = 1,9881$, $2 > 1,9881$. Galima pasinaudoti ir skaičiuokliu: $\sqrt{2} \approx 1,414213562 > 1,41$.
f) Palyginame skaičių modulius pakeldami kvadratu: $(\sqrt{11})^2 = 11$ ir $(3\frac{1}{5})^2 = (\frac{16}{5})^2 = \frac{256}{25} = 10,24$, $11 > 10,24$, tai $-\sqrt{11} < -3\frac{1}{5}$.
Atsakymai. **a)** $-\frac{2}{7} > -\frac{3}{7}$; **b)** $\frac{4}{5} > \frac{4}{7}$; **c)** $-0,3 > -0,(3)$; **d)** $\frac{9}{11} = 0,(81)$; **e)** $\sqrt{2} > 1,41$; **f)** $-\sqrt{11} < -3\frac{1}{5}$.

Priminkite mokiniams
- Jei skaičiai neigiami, tai didesnis tas, kurio modulis mažesnis.
- Jei trupmenų skaitikliai lygūs, tai didesnė ta trupmena, kurios vardiklis mažesnis.
- Jei trupmenų skaitikliai ir vardikliai skirtingi, tai, norėdami palyginti trupmenas, jas patogu subendravardiklinti.
- Jei teigiamas skaičius $a > b$, tai ir $a^2 > b^2$ ir atvirkščiai: Jei teigiamo skaičiaus kvadratas $a^2 > b^2$, tai ir $a > b$.

42. Spręsdami galime pasinaudoti prisimintais teiginiais:
a) pagal (1), $7^3 < 7^5$, nes $5 > 3$; $7^{11} < 7^{12}$; $(-7)^{13} < 7^{12}$, nes $(-7)^{13}$ neigiamas skaičius, jis visada mažesnis už bet kokį teigiamą skaičių;
Palyginame modulius: $7^8 < 7^9$, tai $-7^8 > -7^9$, nes kai abu skaičiai neigiami, tai didesnis tas skaičius, kurio modulis mažesnis.
b) pagal (2), $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$, kadangi $\frac{1}{2} < 1$;
c) pagal (3), $9^5 > 8^5$, nes $9 > 8$; $17^{100} > 16{,}9^{100}$; $(\sqrt{3})^{51}$ ir $1{,}(7)^{51}$.
Palyginti laipsnių pagrindus galime ir naudodamiesi skaičiuokliu:
$\sqrt{3} \approx 1{,}732...$, $1{,}(7) \approx 1{,}777...$, $\sqrt{3} < 1{,}(7)$, tai $(\sqrt{3})^{51} < (1{,}(7))^{51}$.
Atsakymai. **a)** $7^3 < 7^5$, $7^{11} < 7^{12}$, $(-7)^{13} < 7^{12}$, $-7^8 > -7^9$;
b) $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$, $(\frac{2}{3})^2 > (\frac{2}{3})^3$, $0{,}91^{101} < 0{,}91^{100}$;
c) $9^5 > 8^5$, $17^{100} > 16{,}9^{100}$, $(\sqrt{3})^{51} < (1{,}(7))^{51}$;
d) $0{,}5^2 > 0{,}4^2$, $(\frac{2}{7})^{10} < (\frac{3}{8})^{10}$, $(2{,}(2))^{100} > (2\frac{1}{5})^{100}$.

Priminkite mokiniams
(1) Jei $a > 1$ ir $n > m$, tai $a^n > a^m$, $m, n \in N$.
(2) Jei $0 < a < 1$, ir $n > m$, tai $a^n < a^m$, $m, n \in N$.
(3) Jei $a > b > 0$, tai $a^n > b^n$, $n \in N$.

43. Ne visi šio pratimo skaičiai pateikti standartine išraiška: $a \cdot 10^n$, $1 \leqslant a < 10$ (n — vadinamas skaičiaus eile). Dažnai skaičius galima lyginti remiantis 10-ties laipsnių rodikliais ir daugikliais.
Atsakymai. **a)** $1{,}3 \cdot 10^5 < 1{,}3 \cdot 10^7$, $2 \cdot 10^3 < 5 \cdot 10^3$, $-3{,}1 \cdot 10^4 > -3{,}1 \cdot 10^6$;
b) $0{,}5 \cdot 10^{-1} > 0{,}5 \cdot 10^{-3}$, $3 \cdot 10^{-4} < 7 \cdot 10^{-4}$, $-0{,}1 \cdot 10^{-2} < -0{,}1 \cdot 10^{-3}$;
c) $4{,}1 \cdot 10^{13} > -4{,}1 \cdot 10^{13}$, $2{,}7 \cdot 10^2 > 2{,}7 \cdot 10^{-2}$, $0{,}2 \cdot 10^{10} < 2{,}0 \cdot 10^{10}$.

Priminkite mokiniams
- Jei skaičiai parašyti standartine išraiška, tai didesnis yra tas teigiamasis skaičius, kurio eilė didesnė.
- Jei skaičių eilė vienoda, tai lyginame pačius skaičius.

44. Į uždavinio klausimus galima atsakyti panagrinėjus pavyzdžius:
a) Pvz.: $\sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{8}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} > \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$.
Jei $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, tai $a > b$; $n \in N$, $n \geqslant 2$.
b) Pvz.: $\sqrt{27} > \sqrt[3]{27}$, $\sqrt{625} > \sqrt[4]{625}$.
Jei $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$, tai $n < m$; $m, n \in N$, $m, n \geqslant 2$.

45. **a)** 16,004; 75,507; 31,471; 508,008; 100,000;
b) 16,00; 75,51; 31,47; 508,01; 100,00;
c) 16,0; 75,5; 31,5; 508,0; 100,0;
d) 16; 76; 31; 508; 100;
e) 20; 80; 30; 510; 100.

46. **1) a)** Deguonies tankis $1{,}43 \approx 1{,}4$ (kg/m^3), absoliučioji paklaida $|1{,}4 - 1{,}43| = 0{,}03$ (kg/m^3). Vandenilio tankis $0{,}09 \approx 0{,}1$ (kg/m^3), absoliučioji paklaida $|0{,}1 - 0{,}09| = 0{,}01$ (kg/m^3).
b) Benzino tankis $0{,}71 \approx 0{,}7$ (g/cm^3), tai absoliučioji paklaida $|0{,}7 - 0{,}71| = 0{,}01$ (g/cm^3). Santykinė paklaida:
$\frac{|0{,}7-0{,}71|}{0{,}7} = \frac{0{,}01}{0{,}7} = \frac{1}{70} \approx 0{,}01428$.
2) Reikšdami santykinę paklaidą procentais, paklaidos reikšmę dauginame iš 100.
Atsakymai. **a)** 0,03 (kg/m^3), 0,01 (kg/m^3); **b)** 1) 0,01428, 0,00369; 2) 1,43% ir 0,37%.

47. **1)** Pasižymime atlyginimą raide A.
Randame, kad pirmoje valstybėje — $854{,}50 \leqslant A \leqslant 855{,}49$,
antroje — $845{,}00 \leqslant A \leqslant 854{,}00$, trečioje — $850{,}00 \leqslant A \leqslant 949{,}00$.
2) 50 euro ct, 5 eurai, 50 eurų; $\frac{0{,}5}{855}$, $\frac{5}{850}$, $\frac{50}{900}$.

48. **1)** 0,0008.
2)

Babiloniečių metodu	Skaičiuokliu	Paklaida
a) $\sqrt{30} = \sqrt{25+5} \approx 5 + \frac{5}{2{,}5} = 5 + \frac{1}{2} = 5{,}5$	$\sqrt{30} \approx 5{,}477$	$\lvert 5{,}5 - 5{,}477\rvert = 0{,}023$
b) $\sqrt{69} = \sqrt{64+5} \approx 8 + \frac{5}{2{,}8} = 8{,}313$	$\sqrt{69} \approx 8{,}307$	$\lvert 8{,}313 - 8{,}307\rvert = 0{,}006$
c) $\sqrt{82} \approx 9 + \frac{1}{18} = 9{,}056$	$\sqrt{82} \approx 9{,}055$	$\lvert 9{,}0556 - 9{,}0554\rvert = 0{,}0001$
d) $\sqrt{125} \approx 11{,}182$	11,180	0,002
e) $\sqrt{139} \approx 11{,}818$	11,790	0,028

Nagrinėdami skyrelio medžiagą mokiniai pakartoja veiksmus su realiaisiais skaičiais ir paprasčiausių lygčių sprendimą. Naujos yra n-ojo laipsnio šaknies, laipsnio trupmeniniu rodikliu ir logaritmo sąvokos.
Aiškinant laipsnių racionaliaisiais laipsnių rodikliais savybes, reikėtų pabrėžti, kad: veiksmų su laipsniais, kurių rodikliai yra sveikieji skaičiai, taisyklės galioja ir laipsniams su trupmeniniais rodikliais; n-ojo laipsnio šaknų savybės analogiškos kvadratinių ir kubinių šaknų savybėms.
Logaritmo ir n-ojo laipsnio šaknies sąvokos aiškinamos, kaip atvirkščias veiksmas kėlimui laipsniu.
Išnagrinėję skyrelio medžiagą mokiniai turėtų:

- *žinoti* laipsnių, kurių rodikliai racionalieji skaičiai savybes, logaritmo apibrėžimą, reikalavimus pologaritminiam reiškiniui ir logaritmo pagrindui;
- *mokėti* apskaičiuoti logaritmo reikšmę, kai ji yra sveikasis skaičius;
- *pasinaudoti* skaičiuokliu laipsnių racionaliuoju rodikliu ir dešimtainių logaritmų apytikslėms reikšmėms rasti;
- *spręsti* paprastas realiųjų skaičių sudėties, atimties, daugybos, dalybos, kėlimo laipsniu užduotis, taikyti logaritmo apibrėžimą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 49–54, 59a–e, 65, 68, 70, 71, 73, 74, 76–79, 81–84, 87–89.
Vidutinis lygmuo: 56, 58, 63, 64, 66, 69, 72, 75, 80, 85, 91.
Aukštesnysis lygmuo: 57, 60–62, 67, 86, 90, 91.

49. **a)** Jei $m \in Z$, $n \in Z$, tai $m + n \in Z$ (Z — sveikųjų skaičių aibė);
b) Jei $m \in Q$, $n \in Q$, tai $m + n \in Q$ (Q — racionaliųjų skaičių aibė);
c) jei $m \in N$, $n \in N$, tai $m - n \in Z$ (dviejų natūraliųjų skaičių skirtumas gali būti ir ne natūralusis skaičius. Pvz.: $4 - 9 = -5$; $3 - 3 = 0$).

51. **a)** Sudėję vienas kitam *priešingus skaičius*, gauname 0: $a + (-a) = 0$;
b) Prie skaičiaus *pridėję 0*, gauname tą patį skaičių: $a + 0 = a$.

52. **a)** 5; **b)** 3,02; **c)** 30,215; **d)** 11,77; **e)** $-1{,}97$; **f)** $-44{,}1$.

53. **a)** 2; **b)** $-6{,}31$; **c)** $-0{,}779$; **d)** 125,94; **e)** $-25{,}3$; **f)** 6,02.

54. **c)** $\frac{17}{30} + \frac{17}{84} = \frac{17.14}{30.14} + \frac{17.5}{84.5} = \frac{17(14+5)}{420} = \frac{323}{420}$;
f) $-\frac{23}{24} + (-\frac{17}{18}) = -\frac{23.3}{6.4.3} - \frac{17.4}{6.3.4} = -\frac{69+68}{6.4.3} = -\frac{137}{72} = -1\frac{65}{72}$.
Atsakymai. **a)** $1\frac{1}{2}$; **b)** $1\frac{5}{12}$; **c)** $\frac{323}{420}$; **d)** $-\frac{73}{147}$; **e)** $\frac{1}{24}$; **f)** $-1\frac{65}{72}$.

Priminkite mokiniams
Šiuo ir panašiais atvejais pravartu paieškoti vardiklių bendro mažiausio kartotinio.

55. **a)** $\frac{1}{6}$; **b)** $-4\frac{3}{4}$; **c)** $3\frac{1}{30}$; **d)** $5\frac{3}{4}$; **e)** $-\frac{11}{35}$; **f)** $-\frac{7}{8}$.

56. **a)** $5\frac{5}{6}$; **b)** $1\frac{13}{20}$; **c)** $-4\frac{3}{14}$; **d)** $-12\frac{611}{660}$; **e)** $-3\frac{1}{30}$.

57. **c)** $x = 2{,}2525...$, $100x = 225{,}2525...$, $100x - x = 223$, $99x = 223$,
$x = \frac{223}{99} = 2\frac{25}{99}$;
$y = 3{,}125...$, $1000y = 3125{,}125...$, $1000y - y = 3125{,}125 - 3{,}125$,
$999y = 3122$, $y = \frac{3122}{999} = 3\frac{125}{999}$;
$2{,}(25) + 3{,}(125) = 5 + (\frac{25}{9\cdot 11} + \frac{125}{9\cdot 111}) = 5 + (\frac{25\cdot 111+125\cdot 11}{9\cdot 11\cdot 111}) = 5\frac{4150}{10989} = 5{,}(377650)$;
d) $x = 4\frac{12}{99}$, $y = 2\frac{5}{9}$; $-4{,}(12) - 2{,}(5) = -(4\frac{12}{99} + 2\frac{5}{9}) = -(6 + (\frac{12}{99} + \frac{5}{9})) = -(6 + (\frac{12+5\cdot 11}{99})) = -6\frac{67}{99} = -6,(67)$.
Atsakymai. **a)** 0,(5); **b)** $-0{,}(1)$; **c)** 5,(377650); **d)** $-6{,}(167)$; **e)** 42,(46);
f) $-15{,}(8)$.

Patarkite mokiniams
Atliekant veiksmus su periodinėmis trupmenomis, dažniausiai jas patogu pasiversti paprastosiomis. Bet kartais tai nebūtina, pvz., a) ir f) atvejais atsakymas akivaizdus.

58. **d)** $\frac{4}{7} - 0{,}2 + 1{,}(3) = \frac{4}{7} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3} = 1\frac{74}{105}$;
e) $x = 2{,}1515\ldots$, $100x = 215{,}1515\ldots$, $99x = 213$, $x = \frac{213}{99} = \frac{71}{33}$.
Dabar, $\frac{71}{33} - 2\frac{1}{5} + \frac{3}{7} = \frac{71}{33} + \frac{-11}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2485-2541+495}{33.5.7} = \frac{439}{1155}$.
Atsakymai. **a)** 0; **b)** $\frac{5}{6}$; **c)** $-3\frac{23}{30}$; **d)** $1\frac{74}{105}$; **e)** $\frac{439}{1155}$.

59. **g)** Periodinę trupmeną užsirašome paprastąja $x = 99{,}999...$, $10x = 999{,}999$, $10x - x = 900$, $9x = 900$, $x = 100$. Tada $100 = x - 100$, $x = 200$;
h) $100 = 99{,}(9) - x$, $100 = 100 - x$, $x = 0$.
Atsakymai. **a)** $x = -3$; **b)** $x = -12$; **c)** $x = 27$; **d)** $x = 1\frac{1}{10}$; **e)** $x = 2\frac{1}{2}$;
f) $x = \frac{19}{30}$; **g)** $x = 200$; **h)** $x = 0$.

Priminkite mokiniams
$0{,}(9) = 1$, $99{,}(9) = 100$.

60. **c)** $1+3+5+\dots+999 = 1+2+3+4+5+\dots+999+1000-(2+4+\dots+1000) = 500500-250500 = 250000$. (Pasinaudojome a) ir b) rezultatais.)
d) Pergrupuojame skaičius: $1+(-2)+3+(-4)+5+(-6)+\dots+(-1000) = 1+3+5+\dots+999-(2+4+6+\dots+1000) = 250000-250500 = -500$.
Galime skaičiuoti ir taip:
$(1-2)+(3-4)+(5-6)+\dots+(999-1000) = -1-1-1-\dots-1$,
vienetų susidarys $1000:2=500$, suma lygi -500.
e) $1+2+3+4+\dots+49+50+(-49)+(-48)+\dots+(-1) = 50$. Šioje eilutėje: $1-1=0, \dots 49-49=0$, tik skaičius 50 neturi poros.
f) Ištaisyti klaidą yra dvi galimybės. Jei eilutę užrašysime: $-1+3-5+7-9+11-\dots-91+93-95+97$, tai nesunku pastebėti, kad sudedami nelyginiai skaičiai, bet ženklai keičiasi. Ženklo keitimąsi gausime -1 keldami laipsniu. Tuomet bendrasis sekos narys yra $a_n = (-1)^n(2n-1)$, $n \in N$ ir paskutinis narys turi būti:
$a_{49} = (-1)^{49}(2\cdot 49-1) = -97$.
Eilutė turėtų būti tokia: $-1+3-5+7-9+11-\dots+91-93+95-97$.
Tada suma bus -49.
Jei eilutė parašyta kaip vadovėlyje: $97-95+93-91+\dots+3-1$, tai $a_n = (-1)^{n+1}(100-(2n+1)) = (-1)^{n+1}(99-2n)$ ir paskutinis narys, $a_{49} = (-1)^{49+1}(99-2\cdot 49) = +1$, bet ne -1. Šiuo atveju eilutė turėtų būti tokia: $97-95+93-91+\dots+5-3+1$. Ieškodami sumos, narius grupuojame $(97-95)+(93-91)+\dots+(5-3)+1 = 2\cdot 24+1 = 49$.
g) $(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+\dots+(97+98-99-100) = -4\cdot 25$,
$1+2-3-4=-4$, $5+6-7-8=-4, \dots\ 97+98-99-100=-4$. Šiuo atveju kiekvienų keturių iš eilės einančių skaičių suma lygi -4, o tokių sumų yra $100:4=25$.
Atsakymai. **a)** 500500; **b)** 250500; **c)** 250000; **d)** -500; **e)** 50; **f)** 49 arba -49; **g)** -100; **h)** -231.

Pastaba
Šis uždavinys skirtas labiau mėgstantiems matematiką, bet b) ir c) vertėtų išspręsti su visa klase. Variantas a) yra išspręstas, iš jo galima padaryti išvadą:
Pirmųjų n natūraliųjų skaičių suma apskaičiuojama pagal formulę:
$1+2+3+\dots+n = (1+n)\frac{n}{2}$.

Pastaba
Uždavinyje f) užsirašius sekos bendrąjį narį, nesunku pastebėti, kad sąlygoje sumaišyti ženklai.

61. **a)** 455535; **b)** 5249794278.

62. Tegul paskutinėje eilutėje yra n monetų, tai sudėta $1+2+3+\dots+n$ monetų. Turime 100 monetų, todėl $1+2+3+\dots+n=100$. Jei paskutinė eilutė pilna, tai turi būti teisinga lygybė: $\frac{n(n+1)}{2}=100$. Kairė tos lygybės pusė reiškia dviejų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sandaugos pusę. Bandome nustatyti, kokie tai galėtų būti skaičiai. Kai $n=14$, turėtų būti $(14\cdot 15):2=105$ monetos, bet yra tik 100, kai $n=13$, tai $(13\cdot 14):2=91$, lieka $100-91=9$ monetos, tai pilnų yra 13 eilučių, o 14 — nepilna.
Atsakymas. Apatinėje eilutėje 9 monetos, ji nepilna, monetos sudėtos į 14 eilučių.

Patarkite mokiniams
Galima remtis 60a) uždavinio formule.

63. **a)** Jei $m \in Z$, $n \in Z$, tai $m\cdot n \in Z$;
b) Jei $m \in Q$, $n \in Q$, tai $m\cdot n \in Q$;
c) Jei $m \in N$, $n \in N$, tai $m : n \in Q$.

Priminkite mokiniams
Natūraliųjų skaičių dalmuo ne visuomet yra natūralusis skaičius.

64. Neteisinga rašyti $n \in Z$, nes dalyba iš 0 negalima, o 0 yra sveikasis skaičius. Turi būti papildoma sąlyga, kad $n \neq 0$.

65. **c)** **1)** Sudauginę vienas kitam *atvirkščius skaičius* gauname 1: $a\cdot\frac{1}{a}=1$.
2) Skaičių padauginę *iš vieneto* gauname tą patį skaičių: $a\cdot 1 = a$.

Priminkite mokiniams
$(ab):c = (a:c)\cdot b = a\cdot(b:c)$;
$(a\pm b):c = a:c \pm b:c$, $a:0$;
dalyba iš 0 negalima.

66. **1) a)** Dauginti patogiau susigrupavus dauginamuosius: $2\cdot 4\cdot 8\cdot 125\cdot 250\cdot 500 = (2\cdot 500)\cdot(4\cdot 250)\cdot(8\cdot 125) = 1000\cdot 1000\cdot 1000 = 10^9$.
Atsakymai. **1) a)** 10^9; **b)** 10^{10}; **2)** a^n.

67. a) Sandaugos $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10$ gale vienas nulis akivaizdus, nes dauginama iš 10. Dar vieną nulį duoda $2\cdot 5$. Kiti dauginamieji nulių neduoda.
b) Tokį uždavinį spręsti padeda mąstymas iš kito galo, t. y. pagalvokime kokių skaičių sandaugos baigiasi nuliais:

$$10 = 2\cdot 5 \qquad (10^1 = 2^1\cdot 5^1)$$
$$100 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5 \qquad (10^2 = 2^2\cdot 5^2)$$
$$1000 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 5 \qquad (10^3 = 2^3\cdot 5^3)$$
$$10000 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 \qquad (10^4 = 2^4\cdot 5^4),$$
$$\dots\dots$$
$$10^n = (2\cdot 5)^n = 2^n\cdot 5^n$$

Priminkite mokiniams,
kad sandauga baigiasi 0, kai dauginame iš lyginio skaičiaus penketą arba penketo kartotinį.

Toliau mąstyti galima taip. Sandaugos dauginamuosiuose ieškome daugiklių 2 ir 5. Dvejetukų — apstu. Suskaičiuokime 5-tukus:
$15 = 5 \cdot 3$, $25 = 5 \cdot 5$.
Turime tris penketukus, reiškia — tris nulius. Pridedame akivaizdžius nulius: $2 \cdot 5$, 10, 20. Taigi, iš viso 6 nuliai.

```
   ①           ②            ③              ④                        ⑤ ⑥
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 = 5 · 3, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 = 5 · 5
```

Atsakymai. **a)** 2 nuliai; **b)** 6 nuliai.

68. **a)** Daugindami du teigiamus skaičius, gauname *teigiamą skaičių*.
b) Daugindami du neigiamus skaičius, gauname *teigiamą skaičių*.
c) Daugindami du skirtingų ženklų skaičius, gauname *neigiamą skaičių*.
d) Skaičių a padalyti iš skaičiaus b tai tas pats, kas a padauginti *iš skaičiui b atvirkštinio skaičiaus*.
e) Daugindami *iš nulio* gauname nulį.
Pavyzdžiui:
1) Dalydami du teigiamus skaičius, gauname teigiamą skaičių.
2) Dalydami du neigiamus skaičius, gauname teigiamą skaičių.
3) Dalydami du skirtingų ženklų skaičius, gauname neigiamą skaičių.
4) Dalyti iš nulio negalima.

69.

```
   21,25         41,385 |31
 ×  2,03        -31     |13,35
 +  6375         103
  4250          - 93
  431375          108
  43,1375        - 93
                  155
                 -155
                    0
```

Dalijame, kaip teigiamus skaičius, tik gavę rezultatą, įrašome ženklą „–“.
Atsakymai. **a)** 0,63; **b)** −43,1375; **c)** −2,442; **d)** 22,575; **e)** 13,35; **f)** −52,02; **g)** 233,233.

Priminkite mokiniams
Daugindami arba dalydami pirmiausia nustatome sandaugos (dalmens) ženklą. Dešimtaines trupmenas dauginame kaip natūraliuosius skaičius, o sandaugoje perkeliame kablelį į kairę per tiek vietų, kiek yra abiejuose dauginamuosiuose skaičių po kablelio. Dalijant iš dešimtainės trupmenos, dalinį ir daliklį padauginame iš 10, 100..., t. y. iš 10^n, kad daliklis būtų natūralusis skaičius.

70. **a)** $\frac{1}{6}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $-6\frac{3}{4}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** $1\frac{1}{2}$; **f)** $\frac{8}{9}$; **g)** $-6\frac{3}{4}$; **h)** $\frac{1}{2}$.

71. **a)** $8\frac{1}{3}$; **b)** $1\frac{33}{35}$; **c)** $2\frac{4}{7}$; **d)** $-1\frac{31}{39}$; **e)** $-\frac{18}{31}$; **f)** $-14\frac{2}{3}$.

Priminkite mokiniams
Daugindami ir dalydami mišriuosius skaičius, pasiverčiame jos netaisyklingosiomis trupmenomis.

72. Pasiverskime periodines trupmenas paprastosiomis.
c) $x = 2{,}2525\ldots$, $100x = 225{,}2525\ldots$, $99x = 223$, $x = \frac{223}{99}$;
$y = 3{,}125125\ldots$, $1000y = 3125{,}125125\ldots$, $999y = 3122$, $y = \frac{3122}{999}$;
$2{,}(25) \cdot 3{,}(125) = \frac{223}{99} \cdot \frac{3122}{999} = \frac{223 \cdot 3122}{99 \cdot 999} = \frac{696206}{98901} = 7\frac{3899}{98901}$.
e) $x = 21{,}2121\ldots$, $100x = 2121{,}2121\ldots$, $99x = 2100$, $x = \frac{2100}{99}$;
$y = 21{,}2525\ldots$, $100y = 2125{,}2525\ldots$, $99y = 2103$, $y = \frac{2103}{99}$;
$21{,}(21) : (-21{,}(25)) = -\frac{2100}{99} : \frac{2103}{99} = -\frac{2100 \cdot 99}{99 \cdot 2103} = -\frac{700}{701}$.
Atsakymai. **a)** $\frac{2}{27}$; **b)** $\frac{2}{3}$; **c)** $7\frac{3899}{98901}$; **d)** $10\frac{119}{225}$; **e)** $-\frac{700}{701}$; **f)** $-42\frac{70}{81}$.

73. **c)** $-15x = 23{,}2 \mid : (-15)$, $x = -\frac{23{,}2}{15} = -\frac{232}{150} = -1\frac{41}{75}$;
e) $x : (-5) = -1{,}1$, $\frac{x}{-5} = -1{,}1 \mid \cdot (-5)$, $x = 5{,}5$;
f) $(-5) : x = -1{,}1$, $\frac{-5}{x} = -1{,}1 \mid \cdot x \neq 0$, $1{,}1x = 5 \mid : (-1{,}1)$, $x = \frac{5}{1{,}1} = 4\frac{6}{11}$;
i) $-\frac{0{,}(3)}{x} = 1\frac{1}{2}$, $0{,}(3) = \frac{1}{3}$, $\frac{-1}{3x} = \frac{3}{2}$, $9x = -2$ (pasinaudojame proporcijos savybe: kraštutinių proporcijos narių sandauga lygi vidurinių narių sandaugai), $x = -\frac{2}{9}$.
Atsakymai. **a)** 5; **b)** $2\frac{2}{5}$; **c)** $-1\frac{41}{75}$; **d)** 55; **e)** 5,5; **f)** $4\frac{6}{11}$; **g)** $-9\frac{1}{3}$; **h)** $-\frac{4}{5}$; **i)** $-\frac{2}{9}$.

74. Prieš keldami laipsniu mišrųjį skaičių, pasiverčiame jį netaisyklingąja trupmena.
a) $(1\frac{1}{2})^4 = (\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$;
$(-1\frac{1}{2})^4 = (-\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$;
$-(1\frac{1}{2})^4 = -5\frac{1}{16}$.
Atsakymai. **a)** 4,41; 4,41; −4,41; $\frac{8}{27}$; $-\frac{8}{27}$; $-\frac{8}{27}$; $5\frac{1}{16}$; $5\frac{1}{16}$; $-5\frac{1}{16}$;
b) 128; 2; 4096; −128; −2; 4096; 128; −2; −4096.

75. **a)** Jei $m \in Z$, $n \in N$ $(n \geqslant 2)$, tai $m^n \in Z$;
b) Jei $m \in N$, $n \in N$ $(n \geqslant 2)$, tai $\sqrt[n]{m} \in N$ arba $\sqrt[n]{m} \in I$ (t. y. šaknis yra arba natūralusis, arba iracionalusis skaičius). Pavyzdžiui, $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{11}$ – iracionalusis skaičius, $\sqrt[3]{216} = 6$, $\sqrt[4]{216}$ – iracionalusis skaičius.

76. **a)** 2; 5; 11; 15; 100; **b)** 3; 4; 10; **c)** 2; 4; 10.

77. **1) a)** $(\sqrt{4})^2 = 2^2 = 4$; $(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$; $(\sqrt{10})^2 = 10$;
b) $\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$; $\sqrt{(9)^2} = \sqrt{81} = 9$; $\sqrt{10^2} = 10$;
c) $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$; $\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$; $\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10$.
2) d) $(\sqrt{a})^2 = a$, kai $a \geqslant 0$; **e)** $\sqrt{a^2} = a$, kai $a \geqslant 0$;
f) $\sqrt{a^2} = -a$, kai $a < 0$; **g)** $\sqrt{a^2} = |a|$, kai $a \in R$.

78. **a)** Nelyginio laipsnio šaknis iš teigiamojo skaičiaus yra *teigiamasis skaičius*, o iš neigiamojo skaičiaus – *neigiamasis skaičius*.
b) Nelyginio n-tojo laipsnio šaknimi iš skaičiaus a vadinamas toks skaičius, kurio n-tasis laipsnis lygus a.

79. **c)** $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, kai $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$;
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$, kai $a < 0$, $b < 0$;
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$, kai $a, b \in R$ ir yra vienodų ženklų.

80. **e)** $\sqrt[10]{100^5} = \sqrt[2 \cdot 5]{100^5} = \sqrt{100} = 10$; arba kitaip:
$\sqrt[10]{100^5} = \sqrt[10]{(10^2)^5} = \sqrt[10]{10^{10}} = 10$.
Atsakymai. **a)** 55; **b)** $\frac{3}{20}$; **c)** 4; **d)** 32; **e)** 10.

81. **a)** -5; 5; **b)** 0; **c)** $\varnothing$; **d)** 2; **e)** 0; **f)** -1; **g)** 3; **h)** 0; **i)** $\varnothing$; **j)** 16; **k)** 0; **l)** $\varnothing$; **m)** 1; **n)** -8; **o)** 0.

82. **a)** 4; **b)** 32; **c)** -32; **d)** -32.

83. **a)** 1; **b)** 1; **c)** -1.

84. **a)** $\frac{1}{4}$; **b)** $\frac{1}{32}$; **c)** $-\frac{1}{32}$; **d)** $-\frac{1}{32}$.

85. **d)** $5^{1\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125} \approx 11{,}2$.
Kitaip: $5^{1\frac{1}{2}} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot \sqrt{5} \approx 5 \cdot 2{,}24 = 11{,}2$.
Atsakymai. **a)** 1,4; **b)** 1,3; **c)** 1,6; **d)** 11,2.

Priminkite mokiniams
Reiškinį racionaliuoju rodikliu galima užrašyti panaudojant šaknies simbolį ir reikšmę apskaičiuoti skaičiuokliu.

86. Šiame uždavinyje galima naudotis tokiu skaičiuokliu, kuris apskaičiuoja laipsnių su *iracionaliuoju* rodikliu reikšmes. Bet galima bandyti apsieiti be „gudraus“ skaičiuoklio.
a) Įvertinkime: $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, nes $1{,}4^2 = 1{,}96$; $1{,}5^2 = 2{,}25$. Todėl $2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} < 3$. Vadinasi, $2^{\sqrt{2}} < 3$. Akivaizdu, kad $2^{\sqrt{2}} > 2^1 = 2$.
b) Įvertinkime: $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, nes $1{,}7^2 = 2{,}89$, $1{,}8^2 = 3{,}24$. Todėl $2^{1,7} \approx 3{,}25 > 3$, $2^{1,8} \approx 3{,}48 < 4$. Vadinasi, $3 < 2^{\sqrt{3}} < 4$.
c) Remsimės a) punkto rezultatu. Užrašome $2^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$, kadangi $2 < 2^{\sqrt{2}} < 3$, tai teisinga nelygybė $\frac{1}{2} > \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} > \frac{1}{3}$. Akivaizdu, kad $2^{-\sqrt{2}} < 1$.

Atsakymai. **a)** $2 < 2^{\sqrt{2}} < 3$; **b)** $3 < 2^{\sqrt{3}} < 4$; **c)** $0 < 2^{-\sqrt{2}} < 1$;
d) $0 < 2^{-\sqrt{3}} < 1$; **e)** $0 < (\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} < 1$; **f)** $0 < (\frac{1}{2})^{\sqrt{3}} < 1$; **g)** $2 < (\frac{1}{2})^{-\sqrt{2}} < 3$;
h) $3 < (\frac{1}{2})^{-\sqrt{3}} < 4$.

87. **d)** $\log_2 1 = 0$, nes $1 = 2^0$ ($\log_a 1 = 0$ taip pat visiems $a > 0$ ir $a \neq 1$);
e) $\log_2 2 = 1$, nes $2 = 2^1$ ($\log_a a = 1$ taip pat visiems $a > 0$ ir $a \neq 1$);
f) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, nes $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$; **i)** $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, nes $\frac{1}{9} = 3^{-2}$;
l) $\log_3 \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3}$, nes $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$.
Atsakymai. **a)** 3; **b)** 4; **c)** 7; **d)** 0; **e)** 1; **f)** $\frac{1}{2}$; **g)** 3; **h)** -1; **i)** -2; **j)** 0; **k)** $\frac{1}{2}$; **l)** $\frac{2}{3}$.

Priminkite mokiniams
logaritmo apibrėžimą, nes visi šie uždaviniai sprendžiami jį taikant.

88. **c)** $\log_x 5 = 1$, $x^1 = 5$; $\log_x 25 = 2$, $x^2 = 25$, $x = 5$ ($x = -5$ netinka, nes logaritmo pagrindas teigiamas skaičius).
$\log_x 1000 = 3$, $x^3 = 1000$, $x^3 = 10^3$, tai $x = 10$;
$\log_x \frac{1}{2} = -1$, $x^{-1} = \frac{1}{2}$, $x^{-1} = 2^{-1}$, tai $x = 2$;
$\log_x \frac{1}{27} = -3$, $x^{-3} = \frac{1}{27}$, $x^{-3} = 3^{-3}$, tai $x = 3$.
Atsakymai. **a)** 2; 1; 8; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$; $\sqrt[3]{4}$; **b)** 25; 1; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\sqrt{5}$; **c)** 5; 5; 10; 2; 3.

89. **1)** 3; 2; 1; 0; -1; -2.
2) **a)** 0; 0,3; 0,5; 0,6; 0,7; 0,9; **b)** -1; $-0{,}7$; $-0{,}5$; $-0{,}4$; $-0{,}3$; $-0{,}2$; $-0{,}2$; $-0{,}1$; 0; **c)** 1,0; 1,0; 1,1; 1,1; 1,2; 1,2; 1,2; 1,2; 1,3.

90. **a)** $x > 0$; **b)** $x > -2$; **c)** $x < 0$; **d)** $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
e) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; **f)** $x > 0$; **g)** $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

91. **c)** $\log_{|x|}3$ turi prasmę, kai:
$x \neq 0$, $|x| \neq 1$, t. y. $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$.
e) $\log_{-x}7$ turi prasmę, kai

$$\begin{cases} -x > 0, \\ -x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Dažniau rašoma: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.
Atsakymai. **a)** $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; **b)** $x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$;
c) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; **d)** $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$;
e) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

1.4. Skaičių intervalai

Skyrelyje siejamos aibės ir lygčių bei nelygybių sprendinių skaičiaus sąvokos. Reiktų priminti, kad nelygybės sprendinių aibės dažnai būna intervalai.
Mokiniai turėtų:

- *suprasti*, kad yra lygčių ir nelygybių neturinčių sprendinių, turinčių baigtinį skaičių sprendinių ir be galo daug sprendinių;
- *mokėti* teisingai užrašyti nelygybių sprendinius intervalu, mokėti juos pažymėti skaičių ašyje;
- *rasti* skaitinių intervalų sąjungą ir sankirtą;
- *spręsti* paprastas tiesines nelygybes ir jų sistemas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalusis lygmuo: 93a–t, 95, 96a–e, 97–99, 100a–g, 101, 102.
Vidutinis lygmuo: 92, 93u–z, 94, 960f–h,i, 100h–j, 103.

92. **a)** – **B**; **b)** – **I**; **c)** – **A**; **d)** – **C**; **e)** – **F**; **f)** – **G**; **g)** – **H**; **h)** – **E**; **i)** – **D**.

Priminkite mokiniams
Skaičiaus kvadratas yra neneigiamas skaičius, todėl lygtis $x^2 = -1$ neturi sprendinių. Jei sandauga lygi nuliui, tai bent vienas iš dauginamųjų lygus 0, o kiti turi prasmę.

93. **l)** Nagrinėjame kiekvieną dauginamąjį: arba $2x - 1 = 0$, $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$, arba $3 - 2x = 0$, $2x = 3$, $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$, arba $x - 5 = 0$, $x = 5$, arba $x + 7 = 0$, $x = -7$;
m) $\log_8 x = 2$, pagal logaritmo apibrėžimą $x = 8^2 = 64$;
p) $\sqrt{x} = -4$, sprendinių nėra, nes lyginio laipsnio šaknis iš neneigiamojo skaičiaus yra neneigiamasis skaičius;
r) $\sqrt[3]{x} = -1$, $x = (-1)^3$, $x = -1$;
s) $|x| = 3$, jei skaičiaus modulis lygus 3, tai skaičius lygus arba -3 arba 3;
v) $|x^2 - 6| = 3$, tai arba $x^2 - 6 = -3$ arba $x^2 - 6 = 3$.

Priminkite mokiniams
- Jei skaičiaus modulis mažesnis už a, $|x| < a$, tai pats skaičius yra tarp $-a$ ir a; $-a < x < a$;
- Jei skaičiaus modulis didesnis arba lygus a, $|x| \geqslant a$, tai skaičius arba nedidesnis už $-a$, arba nemažesnis už a: $x \leqslant -a$, $x \geqslant a$.

$x^2 - 3 = 0,$ $\quad$ $x^2 - 9 = 0$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0,$ $\quad$ $(x - 3)(x + 3) = 0,$

$x - \sqrt{3} = 0, \quad x = \sqrt{3},$ $\quad$ $x - 3 = 0, \quad x = 3,$

$x + \sqrt{3} = 0, \quad x = -\sqrt{3};$ $\quad$ $x + 3 = 0, \quad x = -3.$

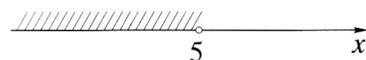
z) $|x^2 - 6| = -3$, sprendinių nėra, nes modulis negali būti neigiamas.
Atsakymai. **a)** $\{4\}$; **b)** $\{-1\}$; **c)** $\{-5; 5\}$; **d)** $\{-11; 11\}$; **e)** $\{-0{,}5; 0{,}5\}$;
f) $\{-\sqrt{0{,}26}; \sqrt{0{,}26}\}$; **g)** $\{0\}$; **h)** $\varnothing$; **i)** $\{-2; \}$; **j)** $\{1; 2\}$; **k)** $\{0; 2; 3; 4\}$;
l) $\{-7; 0{,}5; 1{,}5; 5\}$; **m)** $\{64\}$; **n)** $\{10\}$; **o)** $\{16\}$; **p)** $\varnothing$; **q)** $\{1\}$; **r)** $\{-1\}$; **s)** $\{-3; 3\}$;
t) $\varnothing$; **u)** $\{-8; -2\}$; **v)** $\{-3; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 3\}$; **w)** $\{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$; **z)** $\varnothing$.

94. Pavyzdžiui tokios lygtys: **a)** $3x + 4{,}5 = 13{,}5$; **b)** $x + \sqrt{5} = 0$;
c) $x^2 = 4x$; **d)** $x^2 + 4x - 5 = 0$; **e)** $(x + 2)(x + 1)(x^2 - x)(x^2 - 5x + 6) = 0$;
f) $\frac{x+5}{2} - \frac{2x+10}{4} = 0$; **g)** $|x - 7| + 1 = 0$; **h)** $\sqrt{(5 - x)^2} = 5 - x$.

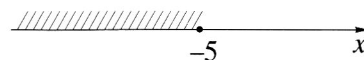
95. **a)** $x > 5$; $x \in (5; +\infty)$; **b)** $x \geqslant 3$; $x \in [3; +\infty)$; **c)** $x < 0$;
$x \in (-\infty; 0)$; **d)** $x \leqslant -\sqrt{2}$; $x \in (-\infty; -\sqrt{2}]$; **e)** $-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$;
$x \in [-1; \sqrt{2}]$; **f)** $-\frac{1}{3} < x < 2\sqrt{5}$; $x \in (-\frac{1}{3}; 2\sqrt{5})$;
g) $-\infty < x < +\infty$, $x \in R$; **h)** $x < -3$, $x > 3$; $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

96.

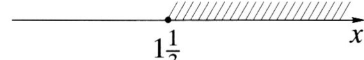
a) $(-\infty; 5)$



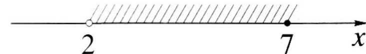
b) $(-\infty; -5]$



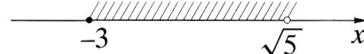
c) $[1\frac{1}{3}; +\infty)$



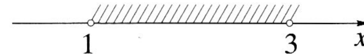
d) $(2; 7]$



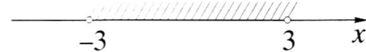
e) $[-3; \sqrt{5})$



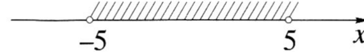
f) $(1; 3)$



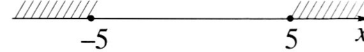
g) $(-3; 3)$



h) $(-5; 5)$

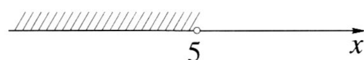


i) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$

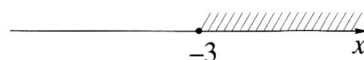


97.

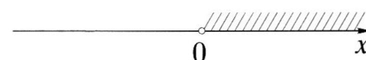
a) $x < 5$



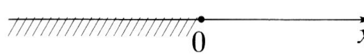
b) $x \geqslant -3$



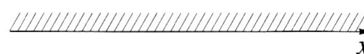
c) $x > 0$



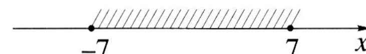
d) $x \leqslant 0$



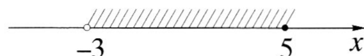
e) $x \in R$



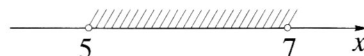
f) $-7 \leqslant x \leqslant 7$



g) $-3 < x \leqslant 5$



h) $5 \leqslant x < 7$



i) $0 < x < 10$



98. **e)** Pertvarkome dešinę nelygybės pusę: $2x - 2 > 2x - 2$; reiškinių reikšmės lygios su bet kokia x reikšme, o sąlyga reikalauja, kad kairėje nelygybės pusėje būtų didesnės reikšmės, todėl nelygybė sprendinių neturi.

f) $2(x - 1) \geqslant 2x - 2$ užrašome kaip $2x - 2 \geqslant 2x - 2$, pagal sąlygą reiškinių reikšmės gali būti lygios, todėl x — bet koks realus skaičius.

Atsakymai. **a)** $x \in [0; +\infty)$; **b)** $x \in (-\infty; 0)$; **c)** $x \in (-2; +\infty)$; **d)** $x \in (0; +\infty)$; **e)** $\varnothing$; **f)** $x \in R$.

Priminkite mokiniams
Dauginant arba dalijant abi nelygybės puses iš neigiamo skaičiaus, nelygybės ženklas keičiasi priešingu. Verta pateikti pavyzdį:
$-2 > -5$, bet $2 < 5$.

99. **a)** $30 \leqslant s \leqslant 55$;

b) $120 \leqslant s \leqslant 220$;

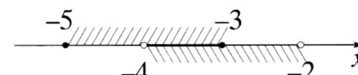
c) pasiverčiame laiką valandomis: 2 val.15 min. = 2,25 h ir, pasinaudoję kelio formule, gausime $135 \leqslant s \leqslant 247{,}5$;

d) $225 \leqslant s \leqslant 412{,}5$.

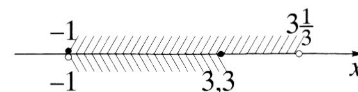
(Akivaizdu, kad klausimas apie kelionėje užgaištą laiką prasmės neturi.)

Priminkite mokiniams, kad kelias apskaičiuojamas pagal formulę $s = vt$, o dydžiai turi būti išreikšti tais pačiais matavimo vienetais.

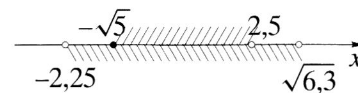
100. **g)** Pažymėkime intervalus vienoje skaičių ašyje. I intervalą virš ašies, II — žemiau. Intervalų sankirta yra du kartus pažymėta skaičių ašies dalis, sąjunga — bent kartą pažymėta skaičių ašies dalis. Sąjunga bus $(-5; -2)$, sankirta — $(-4; 3)$.



h) Palyginame 3,3 su $3\frac{1}{3}$: $3{,}3 = 3\frac{3}{10}$, trupmenas subendravardiklinname, $3\frac{9}{30} < 3\frac{10}{30}$, tai skaičių ašyje $3\frac{1}{3}$ atidedame dešiniau nei 3,3. Sąjunga bus $[-1; 3\frac{1}{3})$, sankirta — $(1; 3{,}3)$.

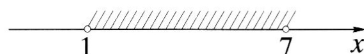


i) Palyginame skaičius $-\sqrt{5}$ ir -2,25: $-\sqrt{5} \approx -2{,}236$, tai $-\sqrt{5} > -2{,}25$ ir $-2{,}25$ skaičių ašyje bus kairiau nei $-\sqrt{5}$. Palyginame 2,5 ir $\sqrt{6{,}3}$: $\sqrt{6{,}3} \approx 2{,}51$, tai $2{,}5 < \sqrt{6{,}3}$ ir $\sqrt{6{,}3}$ skaičių ašyje bus dešiniau nei 2,5. Sąjunga bus $(-2{,}25; \sqrt{6{,}3})$, sankirta — $[-\sqrt{5}; 2{,}5)$.

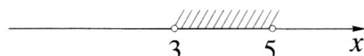


Atsakymai.

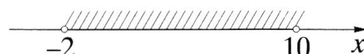
a) $(3; 5) \cup (1; 7) = (1; 7)$



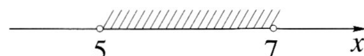
$(3; 5) \cap (1; 7) = (3; 5)$



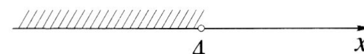
b) $(-2; 10) \cup (5; 7) = (-2; 10)$



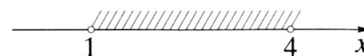
$(-2; 10) \cap (5; 7) = (5; 7)$



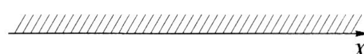
c) $(-\infty; 4) \cup (1; 4) = (-\infty; 4)$



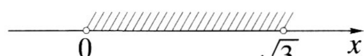
$(-\infty; 4) \cap (1; 4) = (1; 4)$



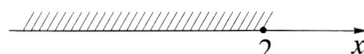
d) $(-\infty; +\infty) \cup (0; \sqrt{3}) = (-\infty; +\infty)$



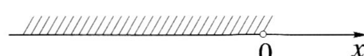
$(-\infty; +\infty) \cap (0; \sqrt{3}) = (0; \sqrt{3})$



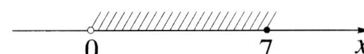
e) $(-\infty; 0) \cup (-\infty; 2] = (-\infty; 2]$



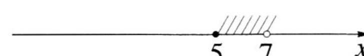
$(-\infty; 0) \cap (-\infty; 2] = (-\infty; 0)$



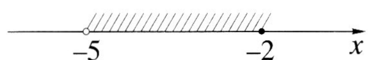
f) $(0; 7] \cup [5; 7) = (0; 7]$

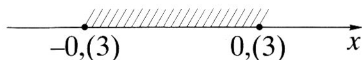


$(0; 7] \cap [5; 7) = [5; 7)$

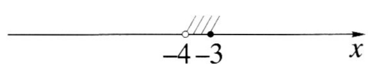


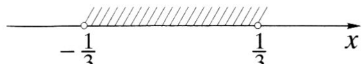
g) $(-5; -3] \cup (-4; -2] = (-5; -2]$ **j)** $(-0,(3); \frac{1}{3}) \cup [-\frac{1}{3}; 0,(3)] = [-0,(3); 0,(3)]$





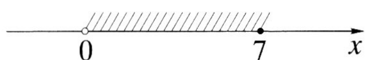
$(-5; -3] \cap (-4; -2] = (-4; -3]$ $(-0,(3); \frac{1}{3}) \cap [-\frac{1}{3}; 0,(3)] = (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

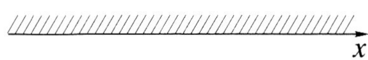


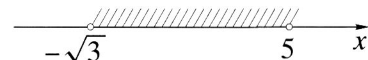


101.

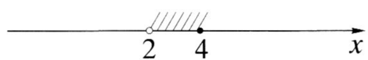
a) $(0; 4] \cup (2; 7] = (0; 7]$ **b)** $(-\infty; 0) \cup (-\sqrt{2}; +\infty) = (-\infty; +\infty)$ **c)** $(-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup [\sqrt{3}; 5) = (-\sqrt{3}; 5)$

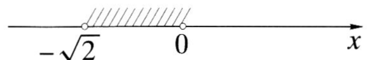






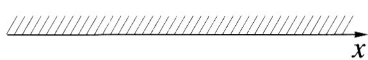
$(0; 4] \cap (2; 7] = (2; 4]$ $(-\infty; 0) \cap (-\sqrt{2}; +\infty) = (-\sqrt{2}; 0)$ $(-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cap [\sqrt{3}; 5) = \varnothing$

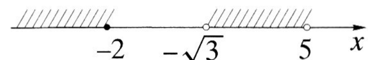




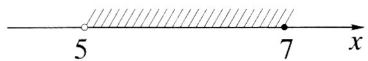


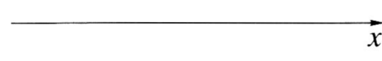
d) $(-\infty; +\infty) \cup (5; 7] = (-\infty; +\infty)$ **e)** $(-\sqrt{3}; 5) \cup (-\infty; -2] = (-\infty; -2] \cup (-\sqrt{3}; 5)$





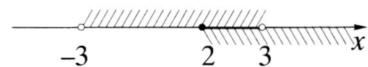
$(-\infty; +\infty) \cap (5; 7] = (5; 7]$ $(-\sqrt{3}; 5) \cap (-\infty; -2] = \varnothing$





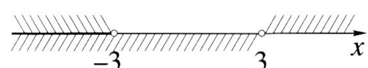
102. d) $\begin{cases} |x| < 3, \\ x \geqslant 2, \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$

Sprendinys $x \in [2; 3)$.



h) Perrašome duotą sistemą kaip dvi nelygybių sistemas:

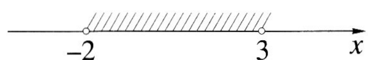
$\begin{cases} x > 3, \\ x \leqslant 3, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x < -3, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$

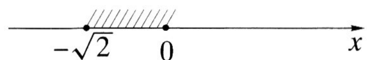


Pradinės sistemos sprendinių aibė yra šių dviejų nelygybių sistemų sprendinių aibių sąjunga $(-\infty; -3)$.

Atsakymai.

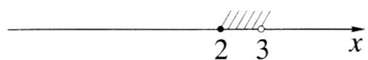
a) $(-2; 3)$ **b)** $[-\sqrt{2}; 0]$ **c)** Nelygybių sistema sprendinių neturi $\varnothing$.

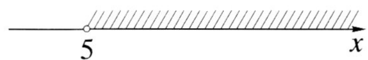


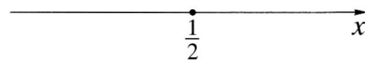




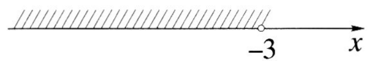
d) $[2; 3)$ **e)** $(5; +\infty)$ **f)** $\{\frac{1}{2}\}$







g) $(-\infty; -3)$



103. a) $(2;5)$; **b)** $[5; +\infty)$; **c)** $\{6\}$; **d)** $\varnothing$.

1.5. Geometrijos uždaviniai

Spręsdami šio skyrelio uždavinius mokiniai pakartoja Pitagoro teoremą ir stačiojo trikampio kraštinių ir kampų trigonometrinius ryšius.

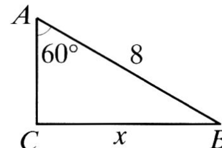
Apytiksles nežinomųjų reikšmes mokiniai gali ieškoti skaičiuokliu. Priminkite, kaip tai daroma.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

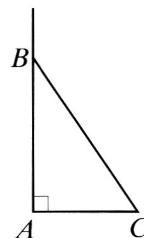
Minimalus lygmuo: 104, 106, 107.
Aukštesnis lygmuo: 105, 108, 109.

104. **f)** *I būdas.* $\angle ABC = 90° - 60° = 30°$ (stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma lygi $90°$), tai statinis AC yra prieš $30°$ kampą ir lygus pusei įžambinės. $AC = 4$, $BC^2 = AB^2 - AC^2$, $BC = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$.
II būdas. $\sin\angle A = \frac{BC}{AB}$, $\sin 60° = \frac{x}{8}$, $x = 8 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.
g) $\cos 40° = \frac{5}{x}$. Pasinaudojame proporcijos savybe: galima sukeisti kraštinius (vidurinius) proporcijos narius vietomis. Jei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tai ir $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. $\frac{\cos 40°}{1} = \frac{5}{x}$, tai $x = \frac{5}{\cos 40°}$, $x \approx 6{,}53$.
Atsakymai. **a)** 50; **b)** 80; **c)** $20\sqrt{2}$; **d)** $5\sqrt{3}$; **e)** 8; **f)** $4\sqrt{3}$; **g)** $\approx 6{,}53$; **h)** $\approx 10{,}64$; **i)** $\approx 9{,}2$; **j)** $30°$; **k)** $\approx 34{,}85°$; **l)** $\approx 43{,}76°$; **m)** $20\sqrt{2}$; **n)** 5; **o)** $2\sqrt{3}$; **p)** $2{,}5\sqrt{55}$; **r)** $3\sqrt{2}$; **s)** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Priminkite mokiniams, kad statinis prieš $30°$ kampą lygus pusei įžambinės.



105. Anteną ir vieną atotampą pavaizduojame sąsiuvinio plokštumoje:
a) atotampa yra stačiojo trikampio ABC įžambinė, tai $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $BC^2 = 15^2 + 5^2$, $BC = \sqrt{250} = \sqrt{25 \cdot 10} = 5\sqrt{10}$.
b) $\text{tg}\,\angle B = \frac{AC}{AB}$, $\text{tg}\,\angle B = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $\angle B \approx 18{,}4°$.
Atsakymai. **a)** $\approx 15{,}8$ m; **b)** $\approx 18°$.



106. $\approx 13{,}23$ m.

107. **a)** $\approx 8{,}66$ m; **b)** $60°$.

108. $\approx 4{,}5$ m.

109. ≈ 35 m.

2. REIŠKINIAI

2.1. Skaitiniai reiškiniai

Spręsdami šio skyrelio uždavinius mokiniai turėtų:

- *žinoti* veiksmų atlikimo tvarką;
- *gebėti* dalį paprasčiausių veiksmų atlikti mintinai;
- *racionaliai* naudotis skačiuokliu.

Reikėtų bent kelis charakteringesnius ir sudėtingesnius uždavinius išspręsti lentoje.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 124, 125, 128a,b, 129, 131, 134, 135.
Vidutinis lygmuo: 126, 127, 130, 133–135.
Aukštesnysis lygmuo: 128c, 132.

124. Reiškinį užsirašome kaip laipsnių vienodais pagrindais sandaugą.
f) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot (\frac{1}{3})^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^2 = 9$;
h) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = \sqrt{2^4\cdot 2} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\sqrt{2}$.
Atsakymai. **a)** -7; **b)** 115; **c)** -30; **d)** 25; **e)** 1; **f)** 9; **g)** $5\sqrt{2}$; **h)** $4\sqrt{2}$.

125. Dešimtaines trupmenas užrašome paprastosiomis.
d) $81 : 7{,}5 - 3{,}8 : \frac{19}{75} = \frac{81}{1} : \frac{75}{10} - \frac{38}{10} : \frac{19}{75} = \frac{81\cdot 10}{75} - \frac{38\cdot 75}{10\cdot 19} = 10\frac{4}{5} - 15 = -4\frac{1}{5}$.
Atsakymai. **a)** $1\frac{53}{72}$; **b)** 1; **c)** 0,51; **d)** $-4{,}2$.

126. **a)** $5+4\cdot\log_5 25 - 10 : \sqrt{100} + 3^0 = 5+4\cdot 2 - 10 : 10 + 1 = 5+8-1+1 = 13$;
b) $0{,}1\cdot\log_{25} 5 + \sqrt[3]{-1}\cdot 0{,}1^{-1} - (-2)^3 = 0{,}1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot 10 - (-8) =$
$= 0{,}05 - 10 + 8 = -1{,}95$;
c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4} : (\frac{3}{4})^{-1} - \lg\frac{1}{10}\cdot\sqrt[4]{0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} : \frac{4}{3} - 0 = \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 9\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{16} =$
$= \frac{17}{16} = 1\frac{1}{16}$;
d) $2 : \frac{3}{5} + 1{,}8\cdot\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{25}}\cdot\lg 1 = \frac{2\cdot 5}{3} + \frac{18\cdot 2}{10\cdot 3} - 0 = \frac{10}{3} + \frac{6}{5} = \frac{50+18}{15} = \frac{68}{15} = 4\frac{8}{15}$;
e) $|-2|\cdot 5^3 : \lg 10 - |3|^0 = 2\cdot 125 : 1 - 1 = 249$;
f) $\lg\sqrt{10}\cdot|-5|^1 + 0{,}25^{-\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{0{,}001} = \frac{1}{2}\cdot 5 + (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} : \frac{1}{10} = \frac{5}{2} + (4)^{\frac{1}{2}}\cdot 10 =$
$= 2{,}5 + 20 = 22{,}5$.
Atsakymai. **a)** 13; **b)** 1,95; **c)** $1\frac{1}{16}$; **d)** $4\frac{8}{15}$; **e)** 249; **f)** 22,5.

127. **a)** Klaidos:
1) neteisinga veiksmų eilė – pirma sudėta $5 + 5$, o po to dauginta;
2) $\sqrt{25} \neq 2$; **3)** $-5^2 \neq 25$; **4)** $\log_5 5 \neq 5$.
Turi būti $5 + 5\cdot\sqrt{25} - 5^2 : \log_5 5 = 5 + 5\cdot 5 - 25 : 1 = 5 + 25 - 25 = 5$.
b) Klaidos 1) $\lg 1 \neq \frac{1}{10}$; 2) $\frac{1}{10} - \frac{1}{30} \neq \frac{1-1}{10-30}$.
Turi būti $\sqrt{0} - 10^0\lg 1 - 0{,}25 : 7{,}5 = 0 - 1\cdot 0 - \frac{25}{750} = -\frac{1}{30}$.

128. **c)** Atrodytų, kad geriau skaičiuoti be skaičiuoklio, ypač jei skaičiuoklis neatlieka veiksmų su paprastosiomis trupmenomis. Tačiau sąlygoje prašoma apskaičiuoti skaičiuokliu, t. y. susidaryti algoritmą. Skaičiuojame atskirai skaitiklį ir vardiklį. Vardiklis yra $7 * 3 = 21$, skaitiklį randame atlikdami tokius veiksmus: $(3 * 3 + 1) * 7 + (2 * 7 + 5) = 127$. Vadinasi,
$3\frac{1}{3} + 2\frac{5}{7} = 127 : 21 \approx 6{,}047619 \approx 6{,}05$.
Atsakymai. **a)** 93; **b)** 45,25; **c)** be skaičiuoklio $6\frac{1}{21}$, skaičiuokliu 6,05.

129. **a)** Iš skaičiaus a atimti skaičių b – tai tas pats, kas prie a *pridėti* $-b$.
b) Skaičių a padalyti iš skaičiaus b – tai tas pats, kas a *padauginti iš* $\frac{1}{b}$.

130. **a)** 10; **b)** 3; **c)** $\frac{1}{5}$; **d)** 10.

131. **a)** Taip; **b)** ne, turi būti $10\sqrt{10}$; **c)** taip; **d)** ne, turi būti $-\sqrt{80}$.

132. **1)** **a)** $\log_2 8 = 3$, $\log_2 16 = 4$, $\log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$,
$\log_2(8\cdot 16) = \log_2 2^3\cdot 2^4 = \log_2 2^{3+4} = 7$;
b) $\lg 10 = 1$, $\lg\frac{1}{10} = -1$, $\lg 10 + \lg\frac{1}{10} = 1 + (-1) = 0$,
$\lg(10\cdot\frac{1}{10}) = \lg(10^1\cdot 10^{-1}) = \lg 10^{1-1} = 0$;
c) $\log_b a + \log_b c = \log_b(ac)$;
2) **a)** $\log_3 27 = 3$, $\log_3 9 = 2$, $\log_3 27 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1$,
$\log_3\frac{27}{9} = \log_3\frac{3^3}{3^2} = \log_3 3^{3-2} = 1$;

Pastaba
Šį uždavinį galima skirti mokiniams, besidomintiems matematika, kaip tyrimo uždavinį arba kaip pratimą, lavinantį gebėjimą daryti išvadas.

b) $\log_{\frac13} 81 = -4$, nes $(\frac13)^{-4} = 3^4 = 81$, $\log_{\frac13} \frac19 = 2$,
$\log_{\frac13} 81 - \log_{\frac13} \frac19 - 4 - 2 = -6$,
$\log_{\frac13}(81 : \frac19) = \log_{\frac13}(\frac13)^{-4} : (\frac13)^2 = \log_{\frac13}(\frac13)^{-4-2} = -6$;
c) $\log_b a - \log_b c = \log_b(a : c)$;
3) a) $\lg 10^2 = 2$, $\lg 10 = 1$, $2 \cdot \lg 10 = 2 \cdot 1 = 2$;
b) $\log_{\frac12} 2^3 = -3$, $\log_{\frac12} 2 = -1$, $3\log_{\frac12} 2 = 3 \cdot (-1) = -3$;
c) $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$;
4) a) $\log_4 16 = 2$, $4^{\log_4 16} = 4^2 = 16$, $4^{\log_4 \frac{1}{16}} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$;
b) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$.
c) 5, 1, -1, a;
d) -3, 1, 0, a;
e) $a^{\log_a b} = b$.

133. d) $(0{,}26 - \frac{1}{20}) \cdot 3\frac47 = (0{,}26 - 0{,}05) \cdot 3\frac47 = 0{,}21 \cdot \frac{25}{7} = \frac{21\cdot25}{100\cdot7} = \frac34 = 0{,}75$;
g) $(1\frac{5}{33} - 2\frac{3}{22}) : \frac{13}{33} = (\frac{38}{33} - \frac{47}{22}) \cdot \frac{33}{13} = \frac{-65\cdot33}{66\cdot13} = -2\frac12$.
Atsakymai. **a)** 1; **b)** 1; **c)** $1\frac19$; **d)** 0,75; **e)** 2; **f)** $4\frac{17}{72}$; **g)** $-2\frac12$; **h)** $1\frac{17}{26}$.

Priminkite mokiniams

Baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis galima užrašyti tik tokias paprastąsias trupmenas, kurių vardikliai yra 2 ir (ar) 5 kartotiniai.

134. a) $5 + 4 \cdot (\log_5 25 - 10) : (\sqrt{100} - 3^0) = 5 + 4 \cdot (2 - 10) : (10 - 1) =$
$= 5 - 4 \cdot 8 : 9 = 5 - 3\frac59 = 1\frac49$;
b) $(\lg 0{,}1 - (\frac23)^3) \cdot \sqrt[6]{1} - \frac{1^2}{2} : 2{,}5 = (-1 - \frac{8}{27}) \cdot 1 - \frac{1\cdot10}{2\cdot25} = -1\frac{8}{27} - \frac15 = -1\frac{67}{135}$;
c) $0{,}2 \cdot ((\log_8 1 + \sqrt[5]{\frac{1}{32}}) : 2^{-5} + 0{,}4^2) = 0{,}2((0 + \frac12) : \frac{1}{32} + 0{,}16) =$
$= 0{,}2 \cdot 16{,}16 = 3{,}232$;
d) $(5^{-2} - (3\log_8 \frac18 - \sqrt{0{,}01})) : (-2) = (\frac{1}{25} - (3 \cdot (-1) - 0{,}1)) : (-2) =$
$= (0{,}04 + 3 + 0{,}1) : (-2) = -3{,}14 : 2 = -1{,}57$;
e) $|-5 + 10 \cdot \lg 100| - (7^{-1} - \sqrt{24 + \lg 10}) = |-5 + 10 \cdot 2| - (\frac17 - \sqrt{24 + 1}) =$
$= 15 - (\frac17 - 5) = 15 + 4\frac67 = 19\frac67$.
Atsakymai. **a)** $1\frac49$; **b)** $-1\frac{67}{135}$; **c)** 3,232; **d)** $-1{,}57$; **e)** $19\frac67$.

135. Galima rašyti:
a)

$$\left(\frac{(8-7)^2}{4+8^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4+\frac{1}{8^2}}\right)^2 = \left(\frac{1\cdot64}{4\cdot64+1}\right)^2 = \left(\frac{64}{257}\right)^2 = \frac{4096}{66049};$$

b)

$$\frac{7 - (\log_5 25 - 3)}{8 + \log_5 25 - 3} + 2^3 = \frac{7 - 2 + 3}{8 + 2 - 3} + 8 = 9\frac{1}{7};$$

c), d) Visi skliaustai reikalingi.
c) $2\sqrt{5 - \lg 10} + (\frac12)^3 = 2\sqrt{5-1} + \frac18 = 4\frac18$;
d) $\log_2(4 + \sqrt{16}) - 2(2 + \sqrt{9})^2 = \log_2 8 - 2 \cdot 5^2 = 3 - 50 = -47$.
Atsakymai. **a)** $\frac{4096}{66049}$; **b)** $9\frac17$; **c)** $4\frac18$; **d)** -47.

2.2. Raidiniai reiškiniai

Skyrelyje koncentruotai pateikiama medžiaga apie algebrinių reiškinių pertvarkius. Gerai būtų, kad mokiniai žinotų greitosios daugybos formules. Reiktų siekti, kad visi mokiniai:

- *teisingai formuluotų* veiksmų su algebriniais reiškiniais taisykles, pateiktų jų taikymo pavyzdžių;
- *gebėtų spręsti* paprastas užduotis (minimalaus lygmens).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 136, 137, 141, 142, 144a, 145, 147–149a–e, 151a–d, 152–155a–f, 156a–d, 158–160.
Vidutinis lygmuo: 139, 143, 149f–i, 150, 151e–h, 155g–l, 156e–h, 157, 161.
Aukštesnysis lygmuo: 138, 140, 144b, 146.

136. d) $a^2 - 2ab + a^2 - 2b^2 - ab = 2a^2 - 3ab - 2b^2$.
Atsakymai. **a)** $-3x+3y$; **b)** $3x^2-y^3$; **c)** $9-6ab+3a+2b$; **d)** $2a^2-3ab-2b^2$.

137. c) Trikampis yra lygiašonis, todėl abu statiniai lygūs a, o įžambinė $\sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$.
Perimetras $P = 2a + a\sqrt{2} = a(2+\sqrt{2})$, plotas $S = \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{a^2}{2}$.
Kai $a = 1$ cm, $S = \frac{1}{2}$ cm^2; kai $a = \frac{1}{3}$ m, $S = \frac{1}{18}$ m^2; kai $a = 2{,}5$ m, $S = 3{,}125$ m^2; kai $a = \sqrt{2}$ dm, $S = 1$ dm^2.
d) $P = 2(a+3a+3) = 2(4a+3)$. Pastebėję, kad duotoji figūra lygiagretainis, jo plotą rasime iš formulės $S = a \cdot h$. Mūsų atveju, $S = AD \cdot BK = (3a+3) \cdot BK$.
Apskaičiuojame BK. Jei $\angle D = 150°$, tai $\angle A = 180° - 150° = 30°$. Statinis prieš $30°$ kampą lygus pusei įžambinės, $BK = \frac{a}{2}$. Todėl

$$S = (3a+3) \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a(a+1)}{2}.$$

Lygiagretainio plotą galėjome rasti ir kitaip: $S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, kur a, b — gretimos lygiagretainio kraštinės, o α — kampas tarp jų.

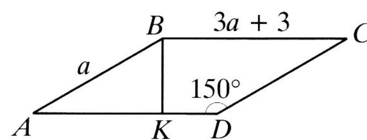
$$S = a \cdot (3a+3) \cdot \sin 30° = a \cdot 3 \cdot (a+1) \cdot \frac{1}{2},$$

$$S = 1{,}5a(a+1).$$

Atsakymai.

	a	1 cm	$\frac{1}{3}$ m	2,5 m	$\sqrt{2}$ dm
a)	$P = 2a + 2 + \sqrt{2a^2+4a+4}$;	$4+\sqrt{10}$;	$\frac{8+\sqrt{50}}{3}$;	$7+\sqrt{26{,}5}$;	$2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2+\sqrt{2}}$;
	$S = \frac{1}{2}a(a+2)$;	1,5;	$\frac{7}{18}$;	5,625;	$1+\sqrt{2}$;
b)	$P = \frac{a(3+\sqrt{3})}{2}$;	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$;	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$;	$1{,}25(3+\sqrt{3})$;	$\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{2}$;
	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$;	$\frac{\sqrt{3}}{8}$;	$\frac{\sqrt{3}}{72}$;	$\frac{\sqrt{3}}{32}$;	$\frac{\sqrt{3}}{4}$;
c)	$P = a(2+\sqrt{2})$;	$2+\sqrt{2}$;	$\frac{2+\sqrt{2}}{3}$;	$2{,}5(2+\sqrt{2})$;	$2\sqrt{2}+2$;
	$S = \frac{a^2}{2}$;	$\frac{1}{2}$;	$\frac{1}{18}$;	3,125;	1;
d)	$P = 8a+6$;	14;	$8\frac{2}{3}$;	26;	$8\sqrt{2}+6$;
	$S = \frac{3a(a+1)}{2}$;	3;	$\frac{2}{3}$;	13,125;	$3+1{,}5\sqrt{2}$.

Priminkite mokiniams
Panašūs nariai yra sudaryti iš vienodų raidžių atitinkamai lygiais laipsnių rodikliais. Sutraukiant panašiuosius narius, sudedami jų koeficientai.



138. b) Jei voras praropoja visomis linijomis, tai jo kelias yra $ADBCDEBAC$.
Įstrižainė $AD = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{25a^2} = 5a$, o $DE = 0{,}5AD = 2{,}5a$.
Voro kelias

$$s = AD + DB + BC + CD + DE + EB + BA + AC;$$

$s = 5a + 4a + 5a + 3a + 2{,}5a + 2{,}5a + 3a + 4a$, $s = 29a$.
Kai $a = 10$ cm, $s = 290$ cm.
Atsakymai. **a)** $2(a+b) + \sqrt{a^2+b^2}$, $(50+\sqrt{325})$ cm; **b)** $29a$, 290 cm.

139. 1) Pėdos nueitas kelias $s = 2\pi r$, čia r — planetos spindulys.
2) Žmogaus viršugalvis brėžia apskritimą, kurio spindulys $r + a$, čia a — žmogaus ūgis. Viršugalvio nueitas kelias $s = 2\pi(r+a) = 2\pi r + 2\pi a$.
3) Viršugalvis nueis už pėdą toliau per $2\pi a$.

Atsakymai.

Planetos	Pėdos kelias (km)	Viršugalvio kelias (km)
Merkurijus	4800π	$4800\pi + 2\pi a$
Plutonas	$6000\ \pi$	$6000\pi + 2\pi a$
Marsas	$6800\ \pi$	$6800\pi + 2\pi a$
Venera	$12000\ \pi$	$12000\pi + 2\pi a$
Žemė	$12800\ \pi$	$12800\pi + 2\pi a$
Uranas	$49200\ \pi$	$49200\pi + 2\pi a$
Neptūnas	$50400\ \pi$	$50400\pi + 2\pi a$
Saturnas	$1206000\ \pi$	$1206000\pi + 2\pi a$
Jupiteris	$142800\ \pi$	$142800\pi + 2\pi a$

140. 1) $S = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2) I dalies: $(a - b)(a - b) = (a - b)^2$;
II dalies: $(a - b) \cdot b = ab - b^2$;
III dalies: $(a - b) \cdot b = ab - b^2$;
IV dalies: $b \cdot b = b^2$.
$(a - b)^2 = a^2 - (ab - b^2) - (ab - b^2) - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

141. a) $ab + 2a^2$; **b)** $-ab^2 + a^3$; **c)** $12x^2 - 3x^3$; **d)** $-4xy + 20xy^2$;
e) $6a - 2a^2 + 4ab$; **f)** $-25a^2 + 10a^2b - 5ab$.

142. a) $ac + ad + bc + bd$; **b)** $ac + ab - bc - b^2$; **c)** $2a^2 + 4ab^2 - ab + 2b^3$;
d) $15a^3 + 20ab^3 + 3a^2b^2 + 4b^5$.

143. e) $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) =$
$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Patarkite mokiniams
Dvinario laipsnį dažnai patogu užsirašyti kaip sandaugą.

144. a) $4ab$; **b)** $6a^2b + 2b^3$.

145. a) Išreiškiame $H = \frac{3V}{\pi R^2} = \frac{3 \cdot 5{,}88\pi}{\pi 2{,}8^2} = 2{,}25$;
b) Išreiškiame $R^2 = \frac{3V}{\pi H}$; $R = \sqrt{\frac{3V}{\pi H}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3{,}675\pi}{\pi \cdot 2{,}5}} = 2{,}1$.
Atsakymai. **a)** 2,25; **b)** 2,1.

146. 1) Kvadratai.

Skaičius	a	$1 + 2a$	Tiksli reikšmė	Absoliutinė paklaida
$1{,}001^2$	0,001	1,002	1,002001	0,000001
$1{,}002^2$	0,002	1,004	1,004004	0,000004
$0{,}999^2$	−0,001	0,998	0,998001	0,000001
$0{,}998^2$	−0,002	0,996	0,996004	0,000004
$1{,}01^2$	0,01	1,02	1,0201	0,0001
$0{,}9^2$	−0,1	0,8	0,81	0,01

2) Kubai.

Skaičius	a	$1 + 2a$	Tiksli reikšmė	Absoliutinė paklaida
$1{,}001^3$	0,001	1,003	1,003003001	0,000003001
$1{,}01^3$	0,01	1,03	1,030301	0,000301
$1{,}1^3$	0,1	1,3	1,331	0,031
$0{,}999^3$	−0,001	0,997	0,997002999	0,000002999
$0{,}99^3$	−0,01	0,97	0,970299	0,000299
$0{,}9^3$	−0,1	0,7	0,729	0,029

147. a) $5(a - b)$; **b)** $4(5a^2 - 2b^2)$; **c)** $-2(b^3 + 1)$; **d)** $b(b - 1)$;
e) $b^2(1 + b^3)$; **f)** $2b^3(b^{10} - 4)$; **g)** $ab(b + 5a)$; **h)** $-xy(3 + 7x)$.

148. **a)** πR^2 — kūgio pagrindo plotas; πRl — kūgio šoninio paviršiaus plotas;
b) R — kūgio pagrindo spindulys, l — kūgio sudaromoji, π — apskritimo ilgio ir skersmens santykis;
c) $l = \frac{Q-\pi R^2}{\pi R} = \frac{27{,}3\pi-\pi\cdot 3{,}9^2}{\pi\cdot 3{,}9} = 3{,}1$.

149. **a)** $(x-y)(x+y)$; **b)** $(2a-5)(2a+5)$; **c)** $(\frac{3}{4}b-a)(\frac{3}{4}b+a)$;
d) $(7m-8n)(7m+8n)$; **e)** $(m+2n)^2$; **f)** $(\frac{a}{3}-b)^2$; **g)** $(0{,}2x+y)^2$; **h)** $(2a-7)^2$;
i) $(\sqrt{2}+a\sqrt{3})^2$.

150. Šiuo uždaviniu mokome pasinaudoti formulėmis, užrašytame reiškinyje įžvelgti kubų sumą ar skirtumą. Sunkiausia tai padaryti **i)** pratime.
c) $\frac{1}{64}-0{,}008x^3 = (\frac{1}{4})^3-(0{,}2x)^3 = (\frac{1}{4}-0{,}2x)(\frac{1}{16}+0{,}05x+0{,}04x^2)$;
g) $0{,}343-y^6 = (0{,}7)^3-(y^2)^3 = (0{,}7-y^2)(0{,}49+0{,}7y^2+y^4)$;
i) $a+b = (\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$.
Atsakymai. **a)** $(2+m)(4-2m+m^2)$; **b)** $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$;
d) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$; **e)** $(a-0{,}1)(a^2+0{,}1a+0{,}01)$;
f) $(5a-2)(25a^2+10a+4)$; **h)** $(x^4+0{,}5)(x^8-0{,}5x^4+0{,}25)$.

151. **a)** $2x^2+4x+2 = 2(x^2+2x+1) = 2(x+1)^2$;
b) $27a^2b-3b^3 = 3b(9a^2-b^2) = 3b(3a-b)(3a+b)$;
c) $5x^2+90x+405 = 5(x^2-18x+81) = 5(x-9)^2$;
d) $(x-2)^2+2(x-2) = (x-2)((x-2)+2) = x(x-2)$;
e) $0{,}72x^5-2xy^6 = 2x(0{,}36x^4-y^6) = 2x(0{,}6x^2-y^3)(0{,}6x^2+y^3)$;
f) $16m^3-2 = 2(8m^3-1) = 2(2m-1)(4m^2+2m+1)$;
g) $(a^2-ac)+(ab-bc) = a(a-c)+b(a-c) = (a-c)(a+b)$;
h) $a^2-2ab+b^2+a-b = (a-b)^2+(a-b) = (a-b)(a-b+1)$.

152. **g)** $x-\frac{2}{1-x} = \frac{x-x^2-2}{1-x} = \frac{-(x^2-x+2)}{-(x-1)} = \frac{x^2-x+2}{x-1}$;
i) $\frac{a}{b}-\frac{a+1}{b+1} = \frac{a(b+1)-b(a+1)}{b(b+1)} = \frac{ab+a-ab-b}{b(b+1)} = \frac{a-b}{b(b+1)}$;
l) $\frac{2}{a+b}-3a = \frac{2-3a(a+b)}{a+b} = \frac{2-3a^2-3ab}{a+b}$;
m) $(x-1)+\frac{1}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2)+1}{x+2} = \frac{x^2+x-1}{x+2}$;
n) $3-\frac{5y}{y-1} = \frac{3(y-1)-5y}{y-1} = \frac{3y-3-5y}{y-1} = \frac{-2y-3}{y-1} = \frac{-(2y+3)}{-(-y+1)} = \frac{2y+3}{1-y}$.
Atsakymai. **a)** $\frac{3x+1}{7}$; **b)** $\frac{14}{x}$; **c)** $\frac{46}{15y}$; **d)** $\frac{x^2+1}{x^2}$; **e)** $\frac{3(x-1)}{x+2}$; **f)** $\frac{b^2(a-b)}{a(a+b)}$; **g)** $\frac{x^2-x+2}{x-1}$;
h) $\frac{m^2-10m+26}{m-5}$; **i)** $\frac{a-b}{b(b+1)}$; **j)** $\frac{6k+5n}{60}$; **k)** $\frac{3m\cdot n^3}{28}$; **l)** $\frac{2-3a^2-3ab}{a+b}$; **m)** $\frac{x^2+x-1}{x+2}$;
n) $\frac{2y+3}{1-y}$.

Pastaba
Pratimus a), d), f) galima spręsti mintinai.

153. **a)** Pertvarkome I reiškinį $c+dc-d = c(1+d)-d$, matome, kad I ir II reiškiniai lygūs.
Kai $c=-\frac{5}{6}$, $d=-2$, tai $c(1+d)-d = -\frac{5}{6}(1-2)-(-2) = \frac{5}{6}+2 = 2\frac{5}{6}$;
b) Kai $c=-0{,}25$, $d=3{,}75$, tai $(c+d)(c-d) = 3{,}5\cdot(-4) = -14$, o
$c+d(c-d) = -0{,}25+3{,}75(-0{,}25-3{,}75) = -0{,}25-15 = -15{,}25$;
c) Reiškiniai lygūs. Kai $x=-2{,}7$, tai $\frac{x-7{,}5}{x+3} = \frac{-2{,}7-7{,}5}{-2{,}7+3} = \frac{-10{,}2}{-0{,}3} = \frac{102}{3} = 34$.
Atsakymai. **a)** $2\frac{5}{6}$; **b)** -14 ir $-15{,}25$; **c)** 34.

Patarkite mokiniams
Prieš įstatant skaitines reikšmes, kartais pravartu reiškinius pertvarkyti ir suprastinti.

154. **b)** $\frac{m^4-1}{m^2-1} = \frac{(m^2-1)(m^2+1)}{m^2-1} = m^2+1$;
c) $\frac{y^{16}-y^{14}}{y^{17}} = \frac{y^{14}(y^2-1)}{y^{17}} = \frac{y^2-1}{y^3}$;
e) $3x^2-8x-3=0$, $x_1 = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$, $x_2=3$,
$3x^2-8x-3 = 3(x+\frac{1}{3})(x-3) = (3x+1)(x-3)$,
$\frac{3x^2-8x-3}{9x^2-1} = \frac{(3x+1)(x-3)}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{x-3}{3x-1}$;
f) $\frac{3x^2-8x-3}{6x^2+5x+1} = \frac{(3x+1)(x-3)}{(2x+1)(3x+1)} = \frac{x-3}{2x+1}$.
Atsakymai. **a)** $\frac{x+3}{10}$; **b)** m^2+1; **c)** $\frac{y^2-1}{y^3}$; **d)** $\frac{2}{a-b}$; **e)** $\frac{x-3}{3x-1}$; **f)** $\frac{x-3}{2x+1}$.

Patarkite mokiniams
Prastinant trupmenas, reikia trupmenos skaitiklį ir vardiklį išskaidyti dauginamaisiais.

155. **a)** $\frac{4x-8}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{9x-18} = \frac{4(x-2)(x-1)(x+1)}{(x+1)9(x-2)} = \frac{4x-4}{9} = \frac{4(x-1)}{9}$;
b) $\frac{y^2-y-12}{16y+30}:\frac{4-y}{2} = \frac{(y^2-4y+3y-12).2}{2(8y+15)\cdot(4-y)} = \frac{(y^2-4y)+(3y-12)}{(8y+15)\cdot(4-y)} = \frac{y(y-4)+3(y-4)}{(8y+15)\cdot(4-y)} =$
$= \frac{(y-4)(y+3)}{(8y+15)\cdot(4-y)} = -\frac{y+3}{8y+15}$;
c) $\frac{1}{y^2-9}+\frac{2}{y+3} = \frac{1}{(y-3)(y+3)}+\frac{2}{y+3} = \frac{1+2y-6}{y^2-9} = \frac{2y-5}{y^2-9}$;
d) $\frac{1}{m^2-9}+\frac{2}{m^2+6m+9} = \frac{1}{(m-3)(m+3)}+\frac{2}{(m+3)^2} = \frac{m+3+2m-6}{(m-3)(m+3)^2} = \frac{3m-3}{(m-3)(m+3)^2}$;
e) $\frac{2}{a^2+6a+9}-\frac{3}{a^2-6a+9} = \frac{2a^2-12a+18-3a^2-18a-27}{(a+3)^2(a-3)^2} = \frac{-a^2-30a-9}{(a+3)^2(a-3)^2} = -\frac{a^2+30a+9}{(a^2-9)^2}$;

f) $x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^3+x+1}{x^2}$;

g) $\frac{1+\frac{1}{x+1}}{x}=(1+\frac{1}{x+1}):x=\frac{x+2}{(x+1)x}$;

Galima spręsti ir dauginant trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš $(x+1)$:

$\frac{(1+\frac{1}{x+1})\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}=\frac{x+1+1}{x(x+1)}=\frac{x+2}{x(x+1)}$;

h) $\frac{(x+\frac{1}{x})\cdot x}{(x-\frac{1}{x})\cdot x}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$;

i) $\frac{m+1}{2+\frac{2}{m}}=\frac{m^2+m}{2m+2}=\frac{m(m+1)}{2(m+1)}=\frac{m}{2}$;

j) $\frac{l+\frac{2}{l}-1}{2+\frac{4}{k^2}-\frac{2}{k}}=\frac{(l^2-l+2)k^2}{2(k^2-k+2)\cdot l}$;

k) $\frac{(m+\frac{m}{n})\cdot n}{(m-\frac{m}{n})\cdot n}=\frac{(mn+m):m}{(mn-m):m}=\frac{n+1}{n-1}$;

l) $\frac{(x+2)^3}{(x+3)^3}:\frac{x+3}{x+2}=\frac{(x+2)^4}{(x+3)^4}=\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^4$.

156. c) Randame šaknis: $a_1=-5$, $a_2=\frac{1}{2}$,
$2a^2+9a-5=2(a+5)(a-\frac{1}{2})=(a+5)(2a-1)$;
e) Randame šaknis: $m^2+m-1=0$, $D=1+4=5$,
$m_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $m_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,
$m^2+m-1=\left(m-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(m-\frac{1-+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{(2m+1+\sqrt{5})(2m+1-\sqrt{5})}{4}$;
f) Randame šaknis: $-m^2+m-3=0$, $D=1+12=13$,
$m_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $m_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$,
$-m^2-m+3=-\left(m-\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(m-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)=-\frac{(2m+1+\sqrt{13})(2m+1-\sqrt{13})}{4}$.
Atsakymai. **a)** $(x-1)(x-2)$; **b)** $(x+1)(x-2)$; **c)** $(a+5)(2a-1)$;
d) $(2x+3)(x+2)$; **e)** $\frac{1}{4}(2m+1+\sqrt{5})(2m+1-\sqrt{5})$; **f)** $-\frac{1}{4}(2m+1+\sqrt{13})(2m+1-\sqrt{13})$;
g) ir **h)** išskaidyti negalima (trinariai realių šaknų neturi).

157. a) $9a^2+2\cdot 3a\cdot 7c+49c^2=(3a+7c)^2$;
b) $25x^2-2\cdot 5x\cdot 8y+64y^2=(5x-8y)^2$;
c) $100-2\cdot 10\cdot 3y+9y^2=(10-3y)^2$.
d) $9b^2-2\cdot 3a\cdot 9b+81a^2=(3b-9a)^2$

Patarkite mokiniams

Šiuose uždaviniuose pravartu užsirašyti narių sandaugą, nes išskaidžius lengviau pastebėti, koks yra antrasis narys.

158. 1) Dauginant laipsnius su vienodais pagrindais, *pagrindas paliekamas tas pats, o laipsnio rodikliai sudedami.*
2) a) $a\cdot a^2\cdot a^3\cdots a^9=a^{1+2+3+\cdots+9}=a^{45}$;
b) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{13}{12}}=a^{1\frac{1}{12}}$;
c) $a^{-2}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{2}}$;
d) $a^{0,5}\cdot a^2\cdot a^{-0,7}=a^{1,8}$.
3) Dalijant laipsnius su vienodais pagrindais, *pagrindas paliekamas tas pats, o laipsnio rodikliai atimami.*
4) a) $a^{10}:a^8=a^2$; **b)** $b^{15}:b^{14}=b^1=b$;
c) $b^7:b^7=b^0=1$; **d)** $b^2:b^5=b^{-3}=\frac{1}{b^3}$;
e) $b^{-\frac{1}{2}}:b^{-\frac{3}{2}}:b^{-\frac{5}{2}}:b^{\frac{7}{2}}=b^0=1$, nes $-\frac{1}{2}-(-\frac{3}{2})-(-\frac{5}{2})-\frac{7}{2}=0$.
5) Dauginant laipsnius su vienodais rodikliais, *laipsnio rodiklis paliekamas tas pats, o pagrindai sudauginami.*
6) a) $2^a\cdot 5^a=(2\cdot 5)^a=10^a$; **b)** $25^a\cdot 3^a\cdot 4^a=(25\cdot 3\cdot 4)^a=300^a$.
7) Dalijant laipsnius su vienodais rodikliais, *laipsnio rodiklis paliekamas tas pats, o pagrindai padalijami.*
8) a) $10^a:5^a=(10:5)^a=2^a$; **b)** $100^b:4^b:5^b=(100:4:5)^b=5^b$.

Pastaba

Mokiniai taisykles turėtų formuluoti taip, kaip čia parašyta, nes dažnai jie daugina ir dalija laipsnių pagrindus.

159. a) $\frac{x}{4y^4}$; **b)** $\frac{1}{4ab^2c}$; **c)** $\frac{x^3}{2}$; **d)** $(ab)^{10}$.

160. a) Sąlygoje prašoma apskaičiuoti gramo dešimtosios tikslumu, matmenys duoti centimetrais, tankis — kilogramais kubiniam decimetrui, todėl iš pradžių suvienodiname matavimo vienetus:
$\rho=7,8$ kg/dm^3 $=\frac{7,8\cdot 1000 \text{ g}}{1000 \text{ cm}^3}=7,8$ g/cm^3, $m=\rho V$,
$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi(2,7)^2 2,1=5,103\pi\approx 16,02$ (cm^3),
$m=\rho V=7,8\cdot 16,02=124,95\approx 125$ (g).
b) $R=0,033$ m $=0,33$ dm, $H=0,057$ m $=0,57$ dm,
$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 0,33^2\cdot 0,57=\pi\cdot 0,020691\approx 0,06496$ (dm^3),
$m=2,7\cdot 0,06496=0,175392$ (kg) $=175,392$ (g) $\approx 175,4$ (g).
Atsakymai. **a)** 125 g; **b)** 175,4 g.

161. **a)** 182,5 cm = 1,825 m, $S = 0{,}007184 \cdot 87{,}2^{0{,}425} \cdot 1{,}825^{0{,}725} \approx 0{,}074$ (m^2);
b) $S = 0{,}007184 \cdot 3{,}5^{0{,}425} \cdot 0{,}52^{0{,}725} \approx 0{,}0076$ (m^2)
c) Suaugusio žmogaus išspinduliuotas šilumos kiekis proporcingas
$\frac{0{,}074}{87{,}2} = \frac{74}{8720} = 872 \cdot 10^4 \approx 8{,}5 \cdot 10^{-4}$;
naujagimio išspinduliuotas šilumos kiekis proporcingas
$\frac{0{,}0076}{0{,}52} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-2}$.
Naujagimis į aplinką išspinduliuoja
$1{,}5 \cdot 10^{-2} : 8{,}5 \cdot 10^{-4} = (1{,}5 : 8{,}5)10^{-2-(-4)} \approx 0{,}176 \cdot 10^2 = 17{,}6$
karto daugiau šilumos, todėl greičiau sušąla.
Atsakymai. **a)** 0,074 m^2; **b)** 0,0076 m^2;
c) suaugusiojo $\approx 8{,}5 \cdot 10^{-4}$, naujagimio $\approx 1{,}5 \cdot 10^{-2}$.

Pastaba

Šį uždavinį spręsti reikia naudojantis „gudriu“ skaičiuokliu. Jei jo nėra, galima šiek tiek supaprastinti formulę, pakeitus 0,425 į $\frac{2}{5}$, o 0,725 į $\frac{3}{4}$. Žinoma, atsakymai nebus tokie tikslūs.

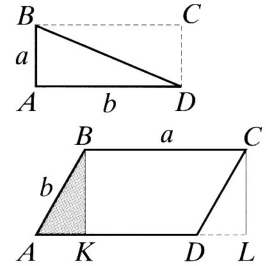
2.3. Geometrijos uždaviniai

Spręsdami 162 uždavinį mokiniai prisimena kvadrato, stačiakampio, trikampio ir lygiagretainio plotų formules, kuriomis vėliau pasinaudoja 163 uždaviniui spręsti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 162.1,2, 163.
Vidutinis lygmuo: 162.3.
Aukštesnysis lygmuo: 162.4,5.

162. **1)** Pridėjus dvi eilutes (arba stulpelius) po 5 kvadratėlius prie turimų, gausime kad stačiakampio plotas yra $25 + 10 = 35$.
2) $S = a \cdot b$.
3) Statųjį trikampį ABC papildome iki stačiakampio $ABDC$ ($DC \parallel AB$ ir $BC \parallel AD$). Įstrižainė BD dalija stačiakampį $ABDC$ į du lygius trikampius. Todėl $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{ABDC}$, $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ab$.



4) Nubrėžiame $CL \perp AD$.
• $\triangle ABK = \triangle CDL$, nes $AB = DC$, kaip lygiagretainio priešingos kraštinės. $BK = CL$, atstumas tarp lygiagrečių tiesių yra pastovus, $\angle BAK = \angle CDL$, kaip atitinkamieji kampai sudaryti lygiagrečių tiesių AB ir CD ir kirstinės.
• Lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus stačiakampio $KBCL$ plotui:

$$S_{ABCD} = S_{KBCL} = BC \cdot BK = a \cdot h.$$

5) Papildome trikampį iki lygiagretainio ir įrodome, kad jį sudarantys trikampiai yra lygūs.

163. **a)** 9; **b)** 50; **c)** 8; **d)** 12; **e)** 8; **f)** 2; **g)** $4\sqrt{5}$; **h)** 4.

Priminkite mokiniams
Kvadrato ir rombo plotą galima apskaičiuoti pagal formulę
$S = 0{,}5 \cdot d_1 d_2$,
čia d_1, d_2 — įstrižainių ilgiai.

3. FUNKCIJOS

3.1. Funkcijos sąvoka ir funkcijos reiškimo būdai

Skyrelio teorinė medžiaga mokiniams nėra nauja, todėl ją mokiniai galėtų pasikartoti savarankiškai išsinagrinėję vadovėlio tekstą.

Mokiniai turėtų mokėti:

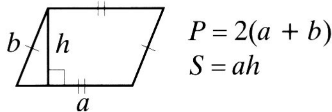
- įvairiai *pateikti* dydžių priklausomybę: formule, lentele, žodžiais, grafiku;
- *nubrėžti* funkcijų $y = kx + b$; $y = \frac{k}{x}$; $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^{2n}$, $y = x^{2n+1}$, $y = \sqrt[2n]{x}$ ir $y = \sqrt[2n+1]{x}$ grafikų eskizus;
- *parodyti*, kaip iš funkcijos analizinės išraiškos ir grafiko nustatyti funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis, lyginumą.

Skyrelio užduotys reikalauja gero pagrindinėje mokykloje nagrinėtų sąvokų, funkcijų savybių ir grafikų žinojimo. Vadovėlyje tai primenama pateikiant paaiškinimus prie uždavinių, apibrėžimus, pavyzdžius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 173, 175, 178, 179, 181a–l, 182a), 183.
Vidutinis lygmuo: 176, 177, 180, 181m–o) 182b,c.
Aukštesnysis lygmuo: 174, 181p–v.

173. b)



$P = 2(a + b)$
$S = ah$

Užpildykime lentelės III ir IV stulpelius (mokome iš formulės rasti nežinomąjį dydį). III stulpelyje viskas paprasta:

- Į perimetro išraišką $P = 2(a + b)$ įstatome $P = 12$, $b = 2$ ir gauname: $12 = 2(a + 2)$, $a = 4$.
- Pasinaudoję ploto formule $S = ah$ randame aukštinę: $\sqrt{32} = 4h$, $h = \frac{\sqrt{32}}{4}$, $h = \sqrt{2}$.

IV stulpelyje pabandykime rasti b.
Iš žinomo perimetro gauname $15 = 2(10 + b)$, $10 + b = 7{,}5$, $b = -2{,}5$.
Lygiagretainio kraštinės ilgis negali būti neigiamas, taigi tokio lygiagretainio nėra.

Atsakymai.

a)

a	1	2	$\sqrt{6}$	$\frac{1}{3}$	2
P	3	6	$3\sqrt{6}$	1	6
S	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{36}$	$\sqrt{3}$

b)

a	2	$\sqrt{2}$	4	10
b	1	$\sqrt{2}$	2	
h	1	$\sqrt{1{,}5}$	$\sqrt{2}$	2
P	6	$4\sqrt{2}$	12	15
S	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{32}$	

c)

a	2	1	1	3
b	4	5	$\sqrt{2}$	7
c	3	3	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	5
h	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt[3]{2}$
S	3	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+1$	$5\sqrt[3]{2}$

d)

r	1	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{2}$	1
C	2π	1	$2\sqrt{\pi}$	π	2π
S	π	$\frac{1}{4\pi}$	1	$\frac{\pi}{4}$	π

e)

a	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt[3]{2}$	3	$\sqrt{3}$
V	1	$2\sqrt{2}$	8	2	27	$3\sqrt{3}$
S_{pav}	6	12	24	$6\sqrt[3]{4}$	54	18

f)

R	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{3}$
H	2	$\sqrt{2}$	5	$\frac{1}{3}$
$S_{šon}$	4π	4π	20π	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$
S_{pav}	6π	8π	28π	$\frac{2\sqrt{3}+18}{3}\pi$
V	2π	$2\sqrt{2}\pi$	20π	π

g)

r	3	6	1
h	4	8	$2\sqrt{2}$
l	5	10	3
$S_{šon}$	15π	60π	3π
S_{pav}	24π	96π	4π
V	12π	96π	$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

h)

R	1	$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
V	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$	$4\sqrt{3}\pi$
S	4π	$4 \cdot \sqrt[3]{\pi}$	8π	12π

174. **c)** Skatiname mokinius pastebėti, kaip vienas dydis išreiškiamas per kitą:
$p = 1$, $k = 3$, $k = 2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1$.
$p = 2$, $k = 5$, $k = 4 + 1 = 2 \cdot 2 + 1$.
$p = 3$, $k = 7$, $k = 6 + 1 = 2 \cdot 3 + 1$.
Spėjame, kad $k = 2 \cdot p + 1$, patikriname spėjimą, kai $p = 4$, $k = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.
Galima nusakyti žodžiais: k yra nelyginiai skaičiai, jų bendra išraiška $2n + 1$ (lyginis skaičius plius vienetas).
d) $m = 0$, $n = 1$, $n = 0 + 1$, $m = 1$, $n = 2$, $n = 1 + 1$, $m = 2$, $n = 5$, $n = 4 + 1$, $m = 3$, $n = 10$, $n = 9 + 1$. Antrasis dėmuo 1, o pirmasis yra m^2, tai yra n yra lygus m kvadratui plius 1.

Atsakymai. **a)** $b = 2a$; **b)** $c = \sqrt{a}$; **c)** $k = 2 \cdot p + 1$; **d)** $n = m^2 + 1$

175. **a)** Kadangi prašoma apskaičiuoti vidutinę paros temperatūrą remiantis lentele, galime tai traktuoti, kaip 25 duomenų iš tos lentelės vidurkio radimą. Sudėję tuos skaičius ir padalijęs iš 25, gausime $-1{,}84°$. Tačiau, jei uždavinį nagrinėtume giliau, reikėtų pastebėti, kad valandų paroje yra 24, tiek pat yra ir atkarpėlių laužtėje. Todėl, jei vidutinę temperatūrą skaičiuotume iš grafiko, teisingiau būtų pirmiausia apskaičiuoti kiekvienos valandos vidutinę temperatūrą (sudėti valandos pradžios ir pabaigos duomenis ir padalyti iš dviejų). Tada, sudėjus gautus skaičius, jau reikia dalyti iš 24 ir gautume, kad vidutinė paros temperatūra yra apie $-1{,}77°$. Kaip matosi, abu rezultatai gana panašūs, tad galima teigiamai įvertinti abu sprendinius.
b) 5) Norėdami apskaičiuoti, koks buvo vidutinis ėjimo greitis, **visą nueitą kelią** (20 km) dalijame iš **viso ėjimo** laiko (5 val.), tad $v_{\text{ėjimo}} = 4$ km/h. Kelionės greitį apskaičiuojame **visą nueitą kelią** (20 km) dalydami iš **viso kelionėje sugaišto laiko** (7 val.), tad $v_{\text{kelionės}} = 2\frac{6}{7}$ km/h.

Atsakymai. **a)** $-1{,}84°$ arba $-1{,}77°$; **b) 1)** tolo pirmąsias 2 val.;
2) artėjo nuo 4 iki 7 val.; **3)** 10 km.
4)

t	0	1	2	3	4	5	6	7
s	0	6	10	10	10	6	2	0

5) $v_{\text{ėjimo}} = 4$ km/h; $v_{\text{kelionės}} = 2\frac{6}{7}$ km/h.

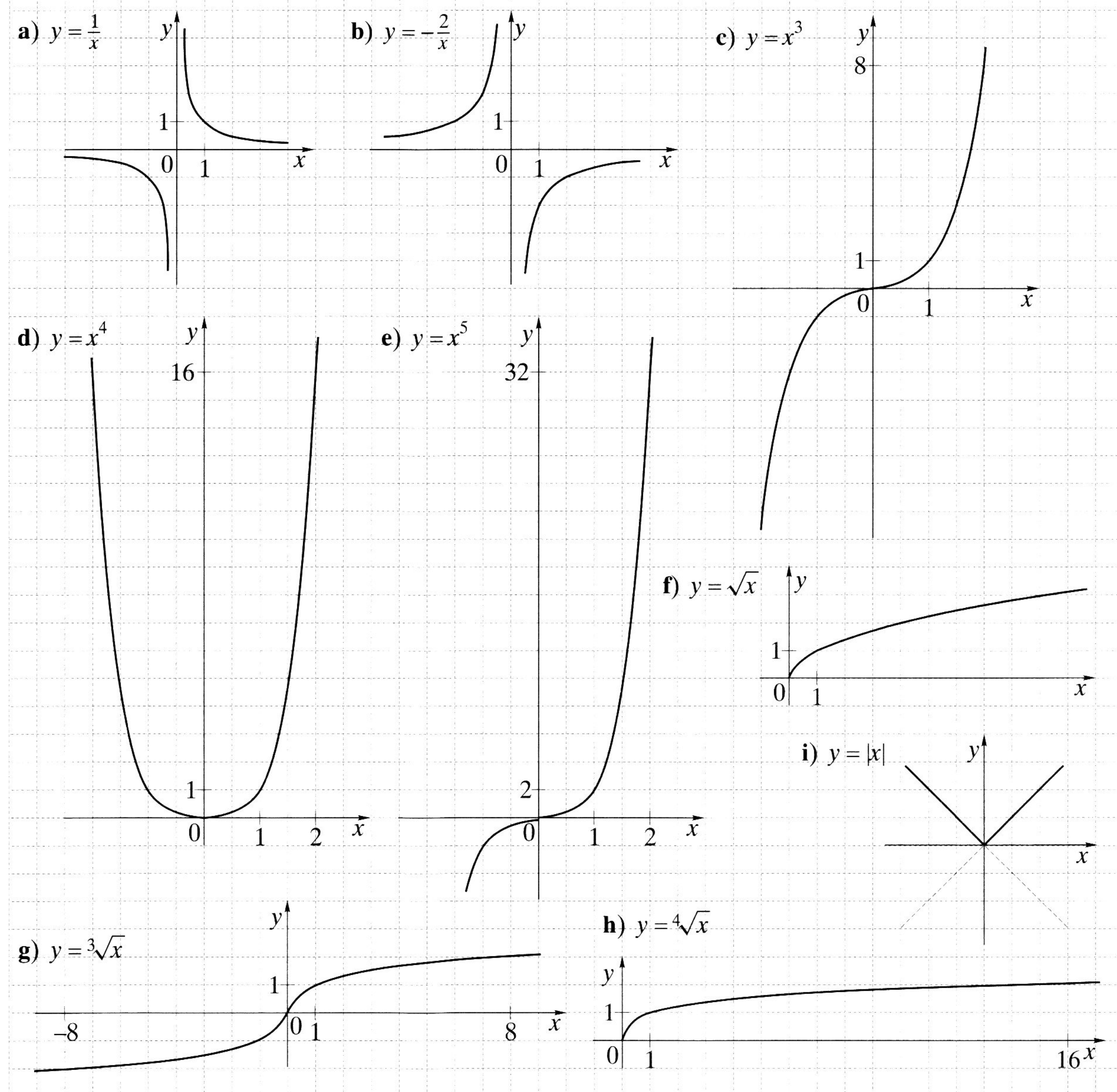
176. Pratimuose a)–e) apskaičiuojame y reikšmes pasirinkę $x_1 \neq x_2$ reikšmes ir patikriname pagal apibrėžimą.
c) $y_1 = x_1^2$; $y_2 = x_2^2$; $x_1 : y_1 = \frac{x_1}{x_1^2} = \frac{1}{x_1}$ ir $x_2 : y_2 = \frac{x_2}{x_2^2} = \frac{1}{x_2}$.
Santykiai nelygūs, tai dydžiai nėra tiesiogiai proporcingi. Tikriname, ar jie yra atvirkščiai proporcingi $x_1 \cdot y_1 = x_1^3$, $x_2 \cdot y_2 = x_2^3$.
Sandaugos nelygios — dydžiai nėra atvirkščiai proporcingi.
Pratimuose f), g), h), i), j), k) — tikriname **visas** pateiktas lentelėje skaičių poras.

Atsakymai. Tiesiogiai proporcingi — **a)**, **b)**, **f)**, **g)**, **i)**; atvirkščiai proporcingi — **d)**, **h)**; nėra proporcingi — **c)**, **e)**, **j)**, **k)**.

177. **a)** $y = \frac{x^2+1}{5}$; **b)** $y = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$;
c) $y = \sqrt{\frac{(x^2+2)\cdot 3 - 6}{3}} = \sqrt{x^2 + 2 - 2} = \sqrt{x^2} = x$, kai $x \geqslant 0$.

178. Grafikus braižome pasinaudodami eskizais pateiktais vadovėlio 85 psl.
1) Tiesė, dviejų taškų;
2) Parabolė;
3) i) Braižant funkcijos $y = |x|$ grafiką, pasinaudojame tuo, kad neneigiamo skaičiaus modulis lygus tam pačiam skaičiui, o neigiamo skaičiaus modulis lygus jam priešingam skaičiui. Kai $x \geqslant 0$, brėžiame tiesę $y = x$, kai $x < 0$, tai brėžiame tiesę $y = -x$.

Atsakymai.



179. Šią užduotį galima siūlyti atlikti savarankiškai. Parabolių grafikams brėžti pravartu turėti parabolių $y = x^2$ ir $y = 2x^2$ šablonus.

Galima spręsti ir taip:

g) Pertvarkę $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, matome, kad funkcijos grafikas gaunamas parabolę $y = x^2$ pastūmus x ašimi per -1.

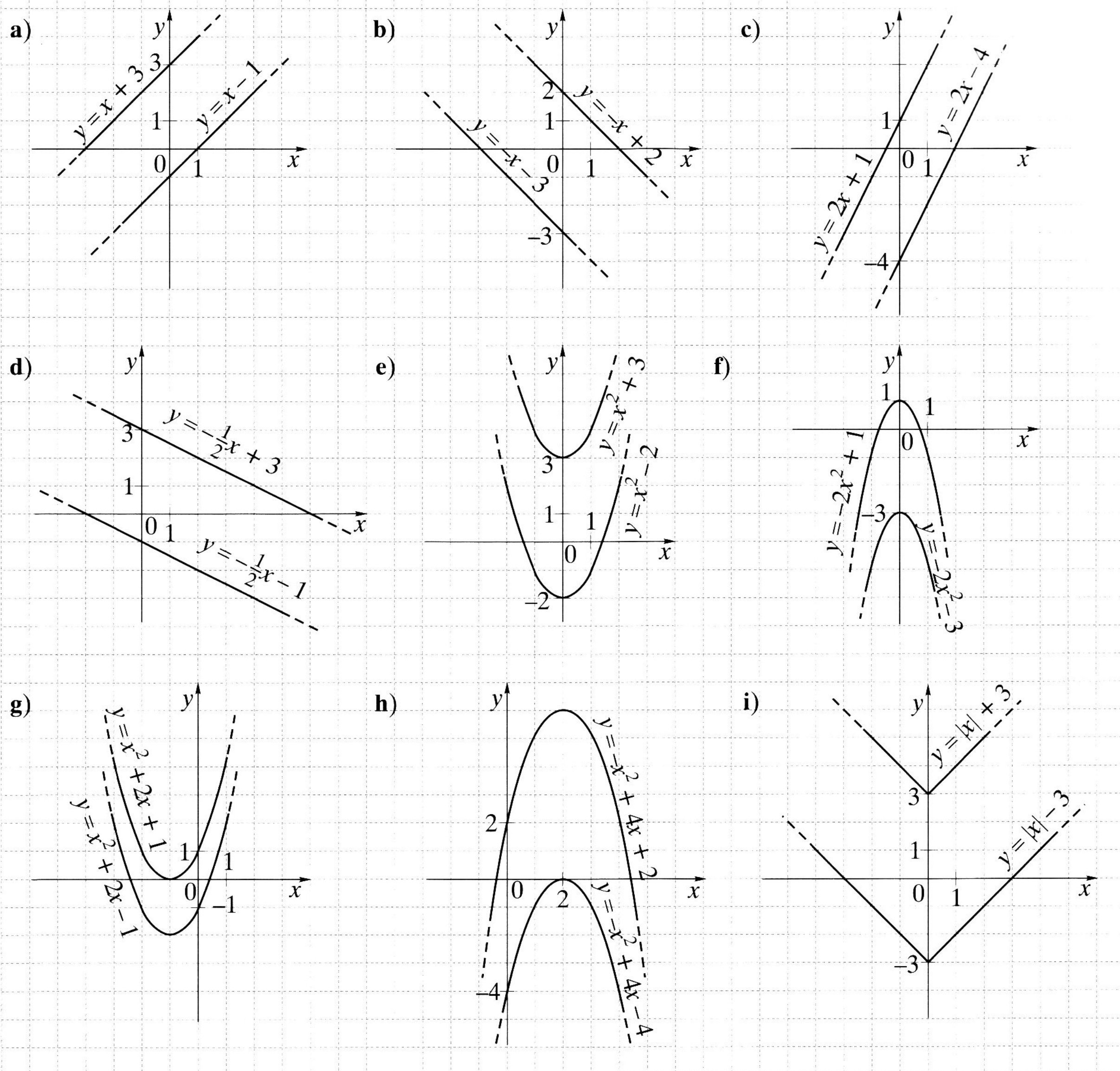
Pertvarkome: $y = x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x + 1 - 2 = (x + 1)^2 - 2$. Šios funkcijos grafiką gauname funkcijos $y = x^2$ grafiką pastūmę x ašimi per -1 ir y ašimi per -2.

h) Pertvarkę $y = -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 + 4x + 4) = -(x - 2)^2$, funkcijos grafiką gauname parabolės $y = -x^2$ grafiką pastūmę x ašimi per 2.

Pertvarkę $y = -x^2 + 4x + 2 = -(x^2 - 4x + 4 - 2) = -(x^2 - 4x + 4) + 2 = -(x-2)^2 + 2$, funkcijos grafiką gauname funkcijos $y = -x^2$ grafiką pastūmę x ašimi per 2 ir y ašimi per 2 vienetus.

Priminkite mokiniams

Norint nubraižyti funkcijos $y = f(x + a)$ grafiką, užtenka funkcijos $y = f(x)$ grafiką pastumti x ašimi per $-a$.



2) Norint nubraižyti funkcijos $y = f(x)+a$ grafiką, užtenka funkcijos $y = f(x)$ grafiką pastumti y ašimi per a vienetų aukštyn, jei $a > 0$ ir žemyn, jei $a < 0$.

180. **a)** $y = x - 2$; **b)** $y = 2x - 1$; **c)** $y = x^2$; **d)** $y = -2x^2 + 4x + 1$; **e)** $y = x^4$; **f)** $y = -x^3 - 3$; **g)** $y = \sqrt{x} - 1$; **h)** $y = \sqrt[5]{x} + 2$; **i)** $y = \lg x - 2$; **j)** $y = \log_2 x$.

181. **h)** Funkcijos $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ grafiko viršūnės koordinatės yra $x_0 = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = 1$, $y_0 = -1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = -2$, $(x_0, y_0) = (1; -2)$. Parabolės „šakos“ nukreiptos žemyn, tai funkcijos reikšmė $y = -2$ yra didžiausia.
Todėl $D_f = (-\infty; \infty)$, o $E_f = (-\infty; -2]$.

o) Nustatome funkcijos $\frac{1}{x+2}$ apibrėžimo sritį: $x + 2 \neq 0$, kai $x \neq -2$, todėl $D_f = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.
Kai $x \in (-\infty; -2)$ funkcijos reikšmės neigiamos.
Kai $x \in (-2; +\infty)$ funkcijos reikšmės teigiamos.
Funkcija neįgyja reikšmės lygios 0, nes $\frac{1}{x+2} \neq 0$ (trupmenos skaitiklis $1 \neq 0$), visas kitas reikšmes gali įgyti.
Pvz., kai $x = 5$, $y = \frac{1}{7}$, kai $x = 98$, $y = \frac{1}{100}$, kai $x = -1{,}99$, $y = 100$, kai $x = -2{,}001$, $y = 1000$.
Taigi, $E_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

r) Funkcijos apibrėžimo sritis yra tos kintamojo reikšmės, su kuriomis vardiklis nelygus 0: $x^2 - 4 \neq 0$, kai $x \neq \pm 2$.
Apibrėžimo sritis D: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

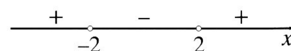
Priminkite mokiniams

Tiesinės funkcijos $y = ax + b$ reikšmių sritis $E_f = (-\infty; +\infty)$. Jei tiesės lygtis $y = a$, funkcijos reikšmės pastovios ir lygios a.
Kvadratinės funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ *reikšmių sritį* nustatome pasinaudodami jos grafiku. Dažnai pakanka įsivaizduoti, kaip atrodys parabolės grafikas, o apskaičiuoti reikia tik parabolės viršūnės koordinates: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = f(x_0)$.
Parodykite, kaip nubraižyti kvadratinės funkcijos grafiko eskizą.

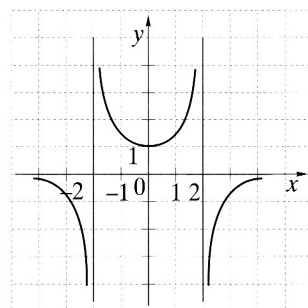
Patarimas

Ši užduotis (kaip ir **s**)) spręstina tik su stipresniais mokiniais.

Reikšmių sritį nustatysime nubrėžę funkcijos $y = x^2 - 4$ grafiko eskizą.
(1) Funkcija yra lyginė, nes $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$, $f(-x) = f(x)$. Jos grafikas simetriškas y ašiai.
(2) Taškuose $x = -2$ ir $x = 2$ funkcija reikšmių neturi. Koordinačių sistemoje brėžiame dvi vertikalias tieses $x = -2$ ir $x = 2$, kurių funkcijos grafikas negali kirsti.
(3) Nagrinėjame, kokios gali būti funkcijos reikšmės kiekviename apibrėžimo srities intervale.
Trupmenos $-\frac{4}{x^2-4}$ skaitiklis teigiamas skaičius, vardiklio ženklas gali keistis taškuose $x = -2$ ir $x = 2$. Nustatome vardiklio ženklą, imdami skirtingas reikšmes:
kai $x \in (-\infty; -2)$, vardiklis teigiamas,
kai $x \in (-2; 2)$, vardiklis neigiamas,
kai $x \in (2; +\infty)$, vardiklis teigiamas.



Žinodami skaitiklio ir vardiklio ženklus, galime nustatyti funkcijos reikšmių ženklą kiekviename apibrėžimo srities intervale.
Kai $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ (kitaip, kai $x < -2$, arba $x > 2$), funkcijos reikšmės $f(x) < 0$.
Kai $x \in (-2; 2)$ (kitaip, kai $-2 < x < 2$), funkcijos reikšmės $f(x) > 0$.
(4) Funkcijos reikšmės negali būti lygios 0, nes trupmena lygi 0, kai jos skaitiklis lygus 0, o vardiklis nelygus 0. Čia trupmenos skaitiklis lygus 4.
(5) Skaičiuokliu randame keletą funkcijos reikšmių, atidedame gautus taškus ir brėžiame apytikslį funkcijos grafiką.



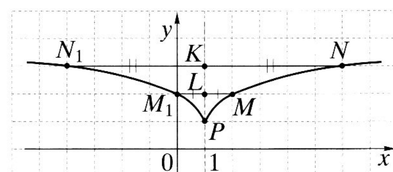
$f(0) = 1$, $f(1) = f(-1) = 1\frac{1}{3}$, $f(2{,}2) = f(-2{,}2) \approx -4{,}8$, $f(3) = f(-3) = = -0{,}8$, $f(4) = f(-4) \approx -0{,}3$.
Iš grafiko matome, kad E: $y = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

Atsakymai.

	D_f	E_f
a)	R	R
b)	R	R
c)	R	$\{5\}$
d)	R	$[0; +\infty)$
e)	R	$[1; +\infty)$
f)	R	$(-\infty; -2]$
g)	R	$(-\infty; 1]$
h)	R	$(-\infty; -2]$
i)	R	$[-1; +\infty)$
j)	R	$[-6{,}25; +\infty)$
k)	R	$[-9{,}25; +\infty)$

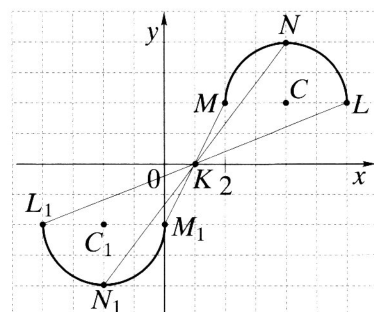
	D_f	E_f
l)	R	$[5{,}75; +\infty)$
m)	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
n)	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
o)	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
p)	$(-\infty; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
r)	$(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
s)	R	$[-1; 0)$
t)	$[1; +\infty)$	$[0; +\infty)$
u)	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
v)	R	$[0; +\infty)$

182. **b)** Atvejis A).



- Pasižymime taškus M ir N ant funkcijos grafiko.
- Brėžiame simetrijos ašį: tiesė $x = 1$ lygiagreti y ašiai.
- Atidedame taškams M ir N simetriškus taškus M_1 ir N_1: brėžiam ML statmenai ašiai ir atidedame $LM_1 = LM$, brėžiam NK statmenai ašiai ir atidedame $KN_1 = KN$. Taškas P, esantis ant simetrijos ašies, simetriškas pats sau.
- Brėžiame antrąją grafiko šaką per taškus P, M_1 ir N_1.

c) Atvejis B).



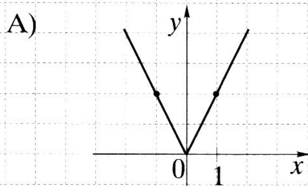
- Pasižymime simetrijos centrą $K(1; 0)$.
- Pasižymime taškus L, M ir N ant duoto grafiko. Atidedame jiems simetriškus centro atžvilgiu taškus L_1, M_1, N_1: per tašką L ir simetrijos centrą brėžiame tiesę ir atidedame $KL_1 = KL$. Taip pat atidedame ir taškus M_1 ir N_1.
- Per taškus L_1, M_1 ir N_1 brėžiame grafiko eskizą.

Pastaba. Jei tikrai žinotume, kad duotos funkcijos grafiko dalis yra pusapskritimis, tuomet pakaktų pažymėti pusapskritimio centrui C simetrišką tašką $C_1(-2; -2)$ ir, išmatavus spindulį, nubrėžti simetrišką pusapskritimį.

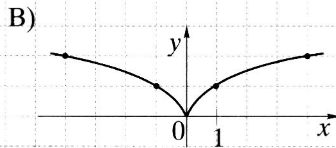
Atsakymai.

a) **1**) lyginės funkcijos

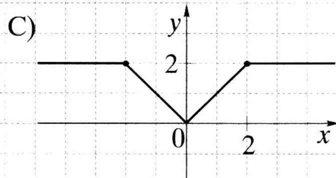
A)



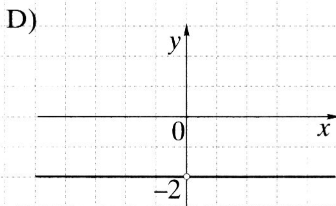
B)



C)

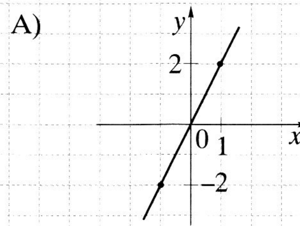


D)

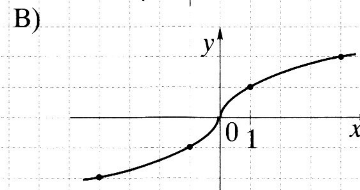


2) nelyginės funkcijos

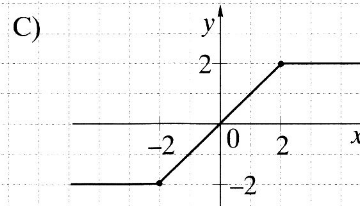
A)



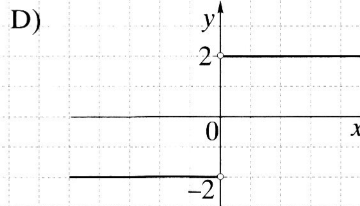
B)



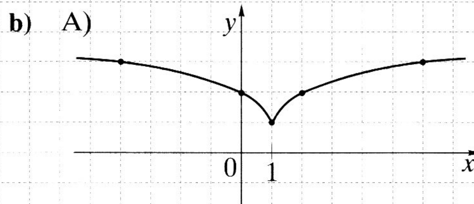
C)



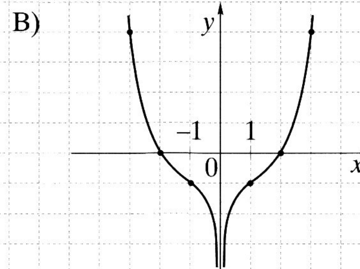
D)



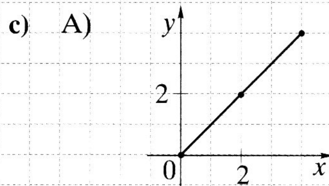
b) A)



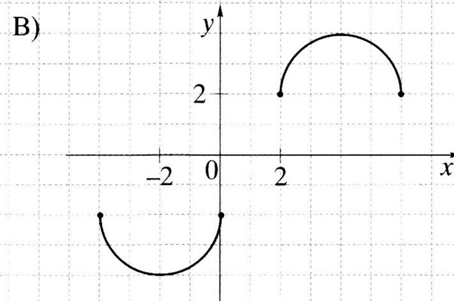
B)



c) A)



B)



183. **b**), **d**), **f**), **h**), **j**) — nėra funkcijų grafikai.

3.2. Funkcijos reikšmių kitimas

Skyrelyje primenama, kaip iš funkcijos grafiko nustatyti funkcijos kitimo pobūdį, didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmes.

Mokiniai turėtų:

- *suprasti*, kad, kai argumento reikšmės didėja, didėjančiosios funkcijos reikšmės didėja, mažėjančiosios — mažėja, o pastoviosios — nekinta;
- iš grafiko *atpažinti*, kuri funkcija yra didėjančioji, kuri mažėjančioji, kuri pastovioji visoje funkcijos apibrėžimo srityje ar intervale, ir *nurodyti* tuos intervalus;
- iš funkcijos grafiko *nustatyti didžiausią ir mažiausią* funkcijos reikšmes ir taškus, kuriuose funkcija įgyja šias reikšmes.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 184, 186a,b, 188.
Vidutinis lygmuo: 185, 186c,d, 187, 189.

184. **g)** **1)** Funkcija $y = -\frac{2}{x}$ yra didėjančioji, nes visoje apibrėžimo srityje didėjant x jos grafikas kyla aukštyn.
2) $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3) Funkcijos grafikas koordinačių ašių nekerta.
4) Intervale $(-\infty; 0)$ funkcijos reikšmės teigiamos, o intervale $(0; +\infty)$ — neigiamos.
i) **1)** Funkcija $y = -x^2 + 1$ nei didėjančioji, nei mažėjančioji, nes intervale $(-\infty; 0)$ funkcijos reikšmės didėja, o intervale $(0; +\infty)$ — mažėja.
2) $D_f = R$, $E_f = (-\infty; 1]$.
3) y ašį kerta taške $(0; 1)$, x ašį kerta taškuose $(-1; 0)$ ir $(1; 0)$.
4) Intervaluose $(-\infty, -1)$ ir $(1, \infty)$ funkcijos reikšmės neigiamos, intervale $(-1, 1)$ — teigiamos.

Atsakymai. **1)** Didėjančiosios funkcijos **a)**, **d)**, **e)**, **j)**; mažėjančioji funkcija **b)**; pastovioji funkcija **c)**; nei didėjančiosios, nei mažėjančiosios, nei pastoviosios funkcijos **f)**, **h)**, **i)**, **k)**, **l)**.
2)–4)

Patarimas
Uždavinio sprendimui mokiniai gali pasinaudoti vadovėlyje (p. 93) pateiktu funkcijos savybių nagrinėjimo pavyzdžiu.

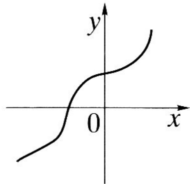
$f(x)$	D_f	E_f	Kerta x ašį	Kerta y ašį	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
a) $y = x + 1$	R	R	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(-1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$
b) $y = -x - 1$	R	R	$(-1; 0)$	$(0; -1)$	$(-\infty; -1)$	$(-1; +\infty)$
c) $y = -2$	R	$\{-2\}$	—	$(0; -2)$	—	$(-\infty; +\infty)$
d) $y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; 0)$	$(0; 0)$	$(0; +\infty)$	—
e) $y = \sqrt[3]{x}$	R	R	$(0; 0)$	$(0; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$
f) $y = \frac{1}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	—	—	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$
g) $y = -\frac{2}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	—	—	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$
h) $y = x^2$	R	$[0; +\infty)$	liečia $(0; 0)$	$(0; 0)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	—
i) $y = -x^2 + 1$	R	$(-\infty; 1]$	$(-1; 0)$, $(1; 0)$	$(0; 1)$	$(-1; +1)$	$(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
j) $y = \log_2 x$	$(0; +\infty)$	R	$(1; 0)$	—	$(1; +\infty)$	$(0; 1)$
k) $y = \lvert x \rvert$	R	$[0; +\infty)$	$(0; 0)$	$(0; 0)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	—
l) $y = \lvert x^2 - 2x \rvert$	R	$[0; +\infty)$	$(0; 0)$, $(2; 0)$	$(0; 0)$	$(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$	—

185. Didėjančioji: $y = x$, mažėjančioji: $y = -x$, pastovioji $y = 1$, nei didėjančioji, nei mažėjančioji, nei pastovioji: $y = x^2$. Visų tų funkcijų grafikai nubraižyti vadovėlyje.

186. Naudojamės funkcijos tyrimo schema, pateikta vadovėlio 96 psl.
Atsakymai. **1)**, **2)**

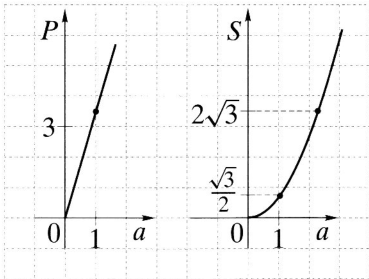
	a)	**b)**	**c)**	**d)**
Apibrėžimo sritis D_f	$[-4; 3]$	R	R	R
Reikšmių sritis E_f	$[-1; 2]$	$[-2; +\infty)$	$[1; 2]$	$[-4; -2) \cup [2; 4]$
$f(x)$ didėja intervale	$(-4; -3) \cup (-1; 1)$	$(0; 2) \cup (5; 9)$	$(0; 2)$	$(-3; 3)$
$f(x)$ mažėja intervale	$(-3; -1)$	$(-\infty; 0) \cup (2; 5)$	$(-2; 0)$	—
$f(x)$ pastovi	$(1; 3)$	$(9; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$
$f(x) > 0$	$(-4; -2) \cup (0; 3)$	$(-\infty; 0) \cup$ $(0; 3) \cup (7; +\infty)$	R	$[0; +\infty)$
$f(x) < 0$	$(-2; 0)$	$(3; 7)$	—	$(-\infty; 0)$
Didžiausia $f(x)$ reikšmė	2, kai $x = -3$	—	2	4, kai $x \in [3; +\infty)$
Mažiausia $f(x)$ reikšmė	-1, kai $x = -1$	-2, kai $x = 5$	1, kai $x = 0$	-4, kai $x \in (-\infty; -3$

3) Ne, žr. pavyzdį.



187. Lygiakraščio trikampio perimetras išreiškiamas formule $P(a) = 3a$ (tiesinė funkcija), plotas $S(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (kvadratinė funkcija), čia a — lygiakraščio trikampio kraštinė.

Atsakymai. **1) a)** — P; **b)** — S; **2)** prie abscisių ašies a, prie ordinačių ašies: **a)** atveju — P, **b)** atveju — S;
3) $P = 3a$, $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; **4)** $P(1) = 3$, $P(2) = 6$, $S(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $S(2) = \sqrt{3}$;
5) $a = 1\frac{2}{3}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $a = 1$, $a = 2\sqrt{2}$.

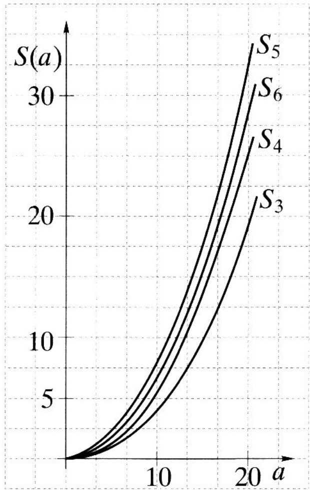


188. 1) a) $2a$; **b)** $\sqrt{3}a$; **c)** $P(a) = 3a + \sqrt{3}a$; **d)** $S(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.
2) Funkcijų grafikai nubraižyti šalia.

189. 1) Ieškomųjų figūrų plotus randame pagal formules:
$S_{\text{trikampio}} = S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $S_{\text{kvadrato}} = S_4 = x^2$, čia x — kraštinės ilgis.
Taisyklingojo šešiakampio plotą galime apskaičiuoti visas jo viršūnes sujungę su jo centru. Gautųjų šešių taisyklingųjų trikampių plotų suma lygi šešiakampio plotui: $S_{\text{šešiakampio}} = S_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$, x — kraštinės ilgis.
$S_{\text{skritulio}} = S_{\text{s}} = \pi r^2$.
Trikampio kraštinė lygi $\frac{a}{3}$, tai plotas $S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2$.
Kvadrato kraštinė lygi $\frac{a}{4}$, tai plotas $S_4 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}a^2$.
Šešiakampio kraštinė lygi $\frac{a}{6}$, tai plotas $S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}a^2$.
Skritulio spindulį apskaičiuojame iš apskritimo ilgio formulės $c = 2\pi r$.
Kadangi $c = a$, tai $r = \frac{a}{2\pi}$ ir $S_{\text{s}} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi} \cdot a^2$.
Visų figūrų plotai išreikšti kintamojo a kvadratine funkcija. Jų grafikai yra parabolės. Apytiksliai apskaičiuojame koeficientus prie a^2:
$S_3(a) \approx 0{,}048a^2$, $S_4(a) \approx 0{,}063a^2$, $S_6(a) \approx 0{,}072a^2$, $S_{\text{sr.}} \approx 0{,}08a^2$.
Pasirinkę bet kokią a reikšmę, pvz., kai $a = 1$, matome, kad skritulio plotas yra didžiausias.
2) Apskaičiuojame kelių parabolės taškų koordinates ir brėžiame apytikslius grafikus.

$a =$	1	10	20
$S_3 =$	0,048	4,8	19,2
$S_4 =$	0,063	6,6	25,2
$S_6 =$	0,072	7,2	28,8
$S_{\text{s.}} =$	0,08	8,0	32

Patarimas. x ir y ašyse imame skirtingus mastelius.



3.3. Funkcijų grafikų taikymai lygtims ir nelygybėms spręsti

Skyrelyje pateikti grafinio lygčių ir nelygybių sprendimo paprasti pavyzdžiai ir nurodymai, kokia tvarka reikia grafiškai spręsti lygtis ar nelygybes.
Mokiniai turėtų:

- *suprasti*, kad išspręsti lygtį $f(x) = g(x)$ reiškia rasti x reikšmes, su kuriomis funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmės yra lygios;
- nusibraižę funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus *nustatyti*, ar yra tokių taškų, kuriuose funkcijos reikšmės lygios (bendrųjų taškų) ir apytiksliai apskaičiuoti x reikšmes. (Atvejis, kai lygtis sprendinių neturi, vadovėlyje nenagrinėjamas, bet galima pateikti ir tokį pavyzdį, nes pagrindinėje mokykloje buvo nagrinėti atvejai, kai lygtis sprendinių neturi. Pvz. $x^2 = x - 3$);
- *mokėti* iš brėžinio nustatyti intervalus, kuriuose vienos funkcijos reikšmės yra didesnės (mažesnės) už kitos funkcijos reikšmes ir taškus, kuriose funkcijų reikšmės lygios.
- *užrašyti* lygties arba nelygybių $f(x) * 0$ (čia $*$ reiškia $=$, $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$) sprendinius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 190, 191, 192.
Vidutinis lygmuo: 194, 195.
Aukštesnysis lygmuo: 193.
Grafiškai spręsdami lygtis ir nelygybes, dažniausiai sprendinius randame apytiksliai, todėl šį sprendimo būdą geriausia naudoti norint tik įsitikinti, ar lygtis (nelygybė) turi sprendinių, arba nemokant kitaip išspręsti.

190. **a)** **1)** $x = -1$; **2)** $x < -1$; **3)** $x \geqslant -1$; **4)** $x = -2$; **5)** $x = 0$; **6)** $x > -2$; **7)** $x \leqslant 0$;
b) **1)** $x = -1$, $x = 2$; **2)** $-1 < x < 2$; **3)** $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; **4)** $x = 0$, $x = 2$; **5)** $x = 2$; **6)** $x < 0$ arba $x > 2$; **7)** $x \geqslant 2$;
c) **1)** $x = 2$; **2)** $0 < x < 2$; **3)** $x \geqslant 2$; **4)** $x = 1$; **5)** sprendinių nėra (funkcijos grafikas nekerta x ašies); **6)** $x > 1$; **7)** sprendinių nėra;
d) **1)** $x = -1$, $x = 1$, $x = 3{,}5$; **2)** $x \in (-1; 1) \cup (3{,}5; +\infty)$; **3)** $x \in (-\infty; -1] \cup [1; 3{,}5]$; **4)** sprendinių nėra; **5)** $x = -2$, $x = 1$, $x = 3{,}2$; **6)** $x \in R$; **7)** $x \in (-\infty; -2] \cup [1; 3{,}2]$.

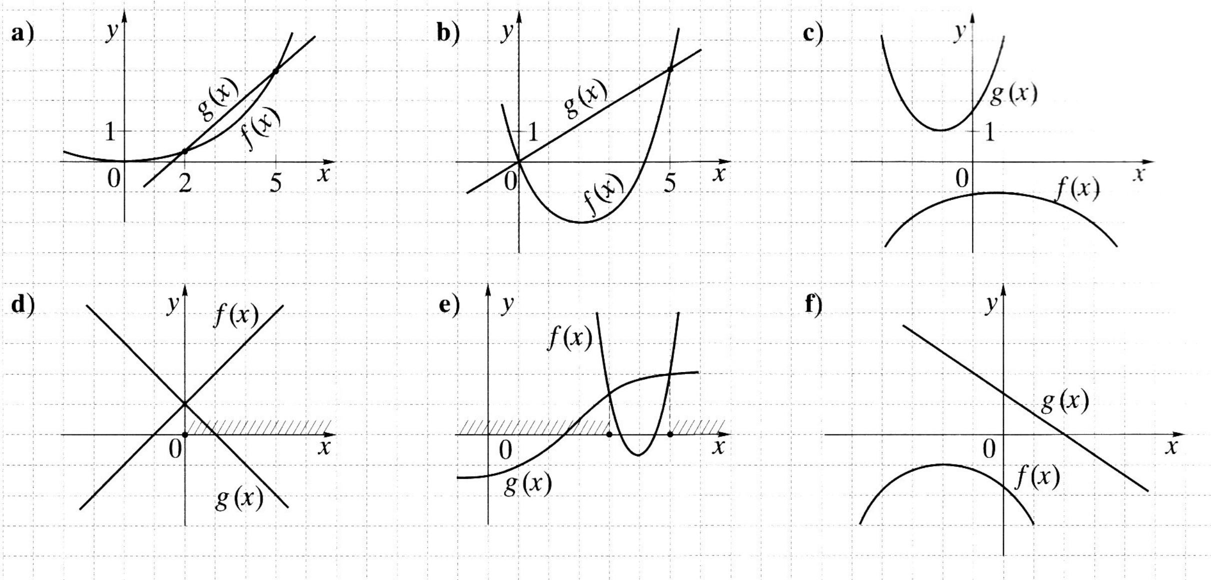
191. **a)** **1)** $x = 2$; $x = 1$ ir $x = 3$; $x = 0$.
2) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; $x \in [0; 4]$; $x \in (-\infty; +\infty)$; sprendinių nėra; vienas sprendinys $x = 2$.
b) **1)** $x \approx 0{,}5$, $x = 1$ ir $x = 3$; sprendinių nėra; $x \approx -0{,}5$ ir $x \approx 4{,}5$;
2) $x \in (1; 3)$; $x \in (-\infty; +\infty)$; $x \in (-0{,}5; 4{,}5)$; $x \in (-\infty; -0{,}5) \cup (4{,}5; +\infty)$; $x \in (-\infty; 0{,}5] \cup [3{,}5; +\infty]$.

Pastaba
Vadovėlyje yra klaida. Tikriausiai jau seniai pastebėjote, kad vietoje $f(2) = -2$ turi būti $f(x) = -2$.

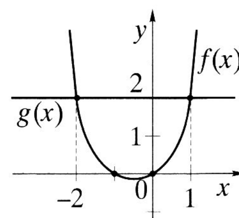
192. **1)** **a)** Spręsta lygtis $\frac{2}{3}x + 3 = -5x + 20$ (rastas funkcijų $y = \frac{2}{3}x + 3$ ir $y = -5x + 20$ grafikų susikirtimo taškas), sprendinys $x = 3$;
b) Spręsta lygtis $2x^2 - 2 = 0$ (rasti funkcijos $y = 2x^2 - 2$ grafiko ir $y = 0$ susikirtimo taškai), sprendiniai $x = \pm 1$.
2) **a)** Sprendžiame $y = \frac{2}{3}x + 3 < -5x + 2$ ieškodami tų x reikšmių, su kuriomis funkcijos $y = \frac{2}{3}x + 3$ reikšmės mažesnės už funkcijos $y = -5x + 2$ reikšmes, t. y. pirmosios funkcijos grafikas *žemiau* negu antrosios. Tai intervalas nuo susikirtimo taško $x = 3$ į kairę: $(-\infty; 3)$.
b) Sprendžiant $2x^2 - 2 \geqslant 0$, žiūrime į grafiką b) ir matome, kad parabolės taškai yra virš x ašies ($y > 0$), arba ant x ašies ($y = 0$), kai $x \leqslant -1$ arba $x \geqslant 1$.
c) Remiamės grafiku b), kai $-1 < x < 1$.

Pastaba
Atkreipkite dėmesį, kad raidės a) ir b) prie brėžinių nieko bendro neturi su raidėmis a) ir b) užduotyje **2)**. Autoriai norėjo pasakyti, kad sprendinius reikia ieškoti, remiantis vienu iš grafikų. Grafiko pasirinkimas parodo, kaip mokiniai atpažįsta tiesines ir kvadratines funkcijas.

193.

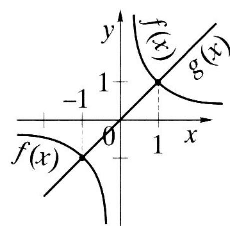


194. **c)** Braižome funkcijų $f(x) = x^2 + x$ ir $g(x) = 2$ grafikus.
Funkcijos $f(x) = x^2 + x$ grafikas yra parabolė, kurios viršūnė taške $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, „šakos“ nukreiptos į viršų. Apskaičiuojame dar kelių taškų koordinates:



x	0	1	-1	2	-2
y	0	2	0	6	2

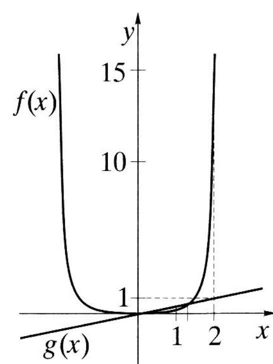
Funkcijos $g(x) = 2$ grafikas — tiesė lygiagreti x ašiai. Grafikų susikirtimo taškų abscisės lygios -2 ir 1.
Atvejus **b)**, **c)** ir **d)** galima spręsti pradžioje pertvarkius lygtį taip, kad kairėje lygybės pusėje būtų funkcija $f(x) = x^2$. Pavyzdžiui, **c)** $x^2 = 2 - x$.
h) Braižome funkcijų $f(x) = \frac{1}{x}$ ir $g(x) = x$ grafikus. Surandame keletą funkcijos $y = \frac{1}{x}$ reikšmių.



x	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Funkcijos $g(x) = x$ grafikas yra tiesė, einanti per taškus (0; 0) ir (2; 2)

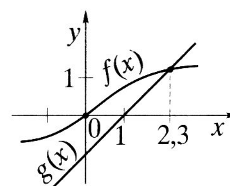
i) Braižome funkcijų $f(x) = x^4$ ir $g(x) = 2x$ grafikus. Surandame keletą funkcijos $f(x) = x^4$ reikšmių.



x	-2	-1	0	1	2
y	16	1	0	1	16

Tiesė $g(x) = 2x$ eina per taškus (0; 0) ir (1; 2)

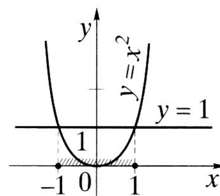
k) Braižome funkcijų $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ir $g(x) = x - 1$ grafikus. Surandame keletą funkcijos $y = \sqrt[3]{x}$ reikšmių. Užtenka ieškoti tik reikšmių, kai x teigiami. Kiti taškai, kai x neigiami, yra simetriški taško (0; 0) atžvilgiu.



x	0	1	8
y	0	1	2

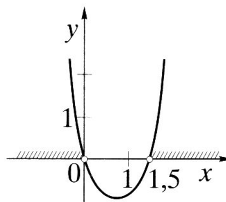
Funkcijos $g(x) = x - 1$ grafikas yra tiesė, einanti per taškus (0; -1) ir (2; 1).
Atsakymai. **a)** $x = \pm 1$; **b)** $x = \pm 1$; **c)** $x = -2$; $x = 1$; **d)** $x = -2$; $x = 1$; **e)** $x = -2$; $x = 1$; **f)** $x = 1$; **g)** $x = 1$; **h)** $x = -1$, $x = 1$; **i)** $x = 0$; $x \approx 1{,}26$; **j)** $x = 0$; $x = 1$; **k)** $x \approx 2{,}3$; **l)** sprendinių nėra.

195. c) Braižome funkcijų $y = x^2$ ir $y = 1$ grafikus.
Funkcijos $y = x^2$ grafikas yra ne aukščiau funkcijos $y = 1$ grafiko (funkcijos $y = x^2$ reikšmės ne didesnės už funkcijos $y = 1$ reikšmes), kai $-1 \leqslant x \leqslant 1$, kitaip $x \in [-1; 1]$.

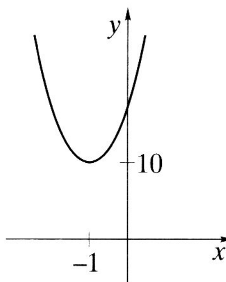


k) Pasinaudojame 194 **k)** uždavinio sprendiniu ir brėžiniu.
Funkcijos $y = \sqrt[3]{x}$ grafikas yra ne žemiau už funkcijos $y = x - 1$ grafiką (funkcijos $y = \sqrt[3]{x}$ reikšmės ne mažesnės už funkcijos $y = x - 1$ reikšmes), kai $x \leqslant 2,3$.

n) Braižome parabolę $y = 2x^2 - 3x$. Parabolės viršūnė yra taške $\left(\frac{3}{4}; -\frac{9}{8}\right)$, grafikas kerta x ašį, kai $x = 0$, $x = 1,5$.
Kai $x \in (-\infty; 0) \cup (1,5; +\infty)$ funkcijos $y = 2x^2 - 3x$ reikšmės yra teigiamos.



u) Braižome parabolę $y = 2x^2 + x + 10$. Parabolės viršūnės koordinatės: $x_0 = -\frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$, $y_0 = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) + 10 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 10 = 9\frac{7}{8}$, viršūnė taške $\left(-\frac{1}{4}; 9\frac{7}{8}\right)$; parabolės „šakos“ nukreiptos į viršų.
Parabolė yra virš x ašies, funkcijos $y = 2x^2 + x + 10$ reikšmės visuomet teigiamos. Nelygybė sprendinių neturi.



Atsakymai. **a)** $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; **b)** $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; **c)** $x \in [-1; 1]$; **d)** $x \in (-\infty; 0]$; **e)** $x \in (-\infty; 1)$; **f)** $x \in [-1,3; +\infty)$; **g)** $x \in (0; +\infty)$; **h)** $x \in (-\infty; 0)$; **i)** $x \in [-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; **j)** $x \in (0; 1)$; **k)** $x \in (-\infty; 2,3)$; **l)** $(-\infty; 0)$; **m)** $x \in [-2; 0]$; **n)** $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$; **o)** $x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$; **p)** sprendinių nėra; **r)** $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$; **s)** $x \in [-4; 0,5]$; **t)** $x \in R$; **u)** sprendinių nėra.

3.4. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos grafinis sprendimas

Išnagrinėję šio skyrelio medžiagą, mokiniai turėtų:

- *suprasti*, kad lygties su dviem nežinomaisiais sprendinys yra skaičių pora, kuri paverčia lygtį teisinga lygybe;
- *žinoti*, kad lygties su dviem nežinomaisiais sprendinį galima rasti vieną nežinomąjį pasirinkus laisvai, o kitą apskaičiuojant iš lygties, įsirašius pasirinktąją reikšmę;
- viena lygtis su dviem nežinomaisiais turi be galo daug sprendinių (atvejai, kai lygtis neturi sprendinių nenagrinėjami);
- lygties $y = f(x)$ sprendinių aibė (skaičių porų aibė), pavaizduota koordinačių plokštumoje, yra lygties $y = f(x)$ grafikas (vadovėlyje pateikiamos tik tiesių ir parabolių lygtys);
- dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendinys yra nežinomųjų reikšmių pora, kuri kiekvieną lygtį paverčia teisinga lygybe;
- *mokėti* nubraižyti sistemos lygčių grafikus bei rasti tų grafikų susikirtimo taškų koordinates (sistemos sprendinius).

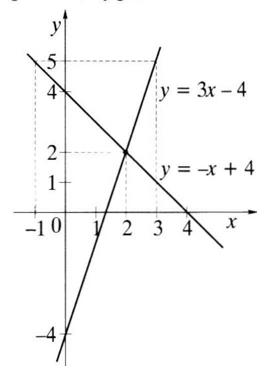
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 196, 197.
Vidutinis lygmuo: 198.
Aukštesnysis lygmuo: 199.

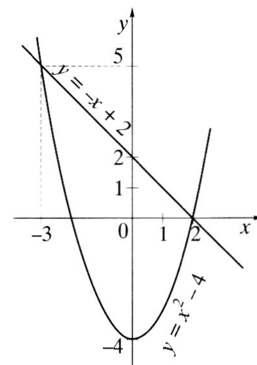
Pastaba.
Ieškant grafiko taškų galima pasirinkti x arba y laisvai ir statyti į pradinę lygtį.

196. 1) Iš lygties $3x - y = 4$ išreiškiame $y = 3x - 4$. Laisvai pasirenkame x ir apskaičiuojame porą funkcijos reikšmių: $x = 0$, $y = -4$ ir $x = 2$, $y = 2$. Per juos brėžiame tiesę $y = 3x - 4$.
2) Taip pat randame $y = -x + 4$ reikšmes ir nusibraižome antrąją tiesę.
3) Bendras sprendinys yra tiesių susikirtimo taškas (2; 2).
4) Įstačius to taško koordinates į lygčių sistemą, matome, kad kiekviena lygtis tampa teisinga lygybe:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 2 = 4, \\ -2 + 4 = 2. \end{cases}$$



197. d) Pirmosios lygties grafikas yra tiesė $y = -x+2$. Jai nubrėžti pakanka dviejų taškų, pvz., kai $x = 0$, $y = 2$, kai $y = 0$, $x = 2$.
Antrosios lygties grafikas yra parabolė. Jos viršūnė yra taške (0; −4), simetrijos ašis sutampa su Oy ašimi, šakos nukreiptos į viršų. Randame dar kelių taškų koordinates.
Vienoje koordinačių sistemoje brėžiame abiejų lygčių grafikus. Jų susikirtimo taškų koordinatės yra šios lygčių sistemos sprendiniai.
Atsakymai. **a)** (−3; 2); **b)** (0; 2); **c)** (−1; 1) ir (2; 4); **d)** (−3; 5), (2; 0).



198. 1) (1; −5); **2)** $\begin{cases} x + 2y = -9, \\ x - y = 6. \end{cases}$

199. c) Paprasčiausia sistema, kurios sprendinys būtų skaičių pora (−3; 2), yra dviejų tiesinių lygčių sistema

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1, \\ y = a_2x + b_2. \end{cases}$$

Kadangi skaičių pora (−3; 2) yra šios sistemos sprendinys, tai, įstatę duotus skaičius, gauname lygybes $2 = a_1(-3) + b_1$, $2 = a_2(-3) + b_2$. Parenkame a_1 ir a_2 bet kokius du skirtingus skaičius (a_1 ir a_2 yra tiesių krypties koeficientai ir jie turi būti skirtingi, kad tiesės susikirstų) pvz., $a_1 = 2$ ir $a_2 = -1$. Tada b_1 ir b_2 rasime iš lygybių:

$$\begin{cases} 2 = 2 \cdot (-3) + b_1, \\ 2 = -1 \cdot (-3) + b_2, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = -6 + b_1, \\ 2 = 3 + b_2, \end{cases} \quad b_1 = 8, \ b_2 = -1.$$

Sugalvotoji sistema bus $\begin{cases} y = 2x + 8, \\ y = -x - 1. \end{cases}$

Pasirinkę kitas a_1 ir a_2 reikšmes gautume kitą lygčių sistemą, kurios sprendinys taip pat būtų (−3; 2).
Atsakymai.
a) $\begin{cases} y = 2x, \\ y = 5x. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = 3x + 4, \\ y = x + 4. \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = 2x + 8, \\ y = -x - 1. \end{cases}$

3.5. Geometrijos uždaviniai

Šio skyrelio uždavinių sprendimas reikalauja prisiminti:

- Pitagoro ir jai atvirkštinę teoremas;
- sinusų ir kosinusų teoremas;
- atstumo tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų radimo formulę;
- lygiagretainio ploto radimo formules;
- trikampio savybę: jei trikampio aukštinė yra ir pusiaukraštinė, tai trikampis yra lygiašonis.

Formules ir teoremas, pateiktas vadovėlyje, mokiniai gali pasikartoti savarankiškai, tačiau jų taikymą reiktų nagrinėti su mokytojo pagalba.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

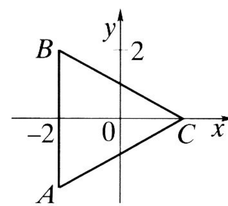
Minimalus lygmuo: 200, 201a,b, 203a),b.
Vidutinis lygmuo: 201c,d, 202c.
Aukštesnysis lygmuo: 202d.

200. **h)** Trikampio kampus apskaičiuosime pasinaudodami kosinusų teorema: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A$. Iš čia $\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos\angle A \approx 0{,}8818$; $\angle A \approx 28{,}1°$; $\cos\angle B = \frac{121+49-25}{154} \approx 0{,}9415$; $\angle B \approx 19{,}7°$; $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$; $\angle C = 132{,}2°$.

Atsakymai.
a) $AC = \sqrt{29 - 20\cos 100°} \approx 5{,}7$, $\angle C \approx 20{,}2°$, $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) \approx \approx 59{,}8°$; **b)** $AB = \sqrt{34 - 30\cos 96°} \approx 6{,}1$, $\angle A \approx 54{,}6°$, $\angle B \approx 29{,}4°$; **c)** $BC = \sqrt{130 - 126\cos 15°} \approx 2{,}9$, $\angle B \approx 38{,}6°$, $\angle C \approx 180° - (15° + 38{,}6°) = 126{,}4°$; **d)** $\angle B = 75°$, $AB \approx 7{,}2$, $BC \approx 5{,}9$; **e)** $\angle B = 20°$, $AB \approx 7{,}6$, $BC \approx 5{,}6$; **f)** $\angle B = 95°$, $AB \approx 6{,}7$, $AC \approx 8{,}7$; **g)** $\angle A \approx 59{,}2°$, $\angle B \approx 69{,}5°$, $\angle C \approx 51{,}3°$; **h)** $\angle A \approx 28{,}1°$, $\angle B \approx 19{,}7°$, $\angle C \approx 132{,}2°$; **i)** $\angle A \approx 41{,}4°$, $\angle B \approx 82{,}8°$, $\angle C \approx 55{,}8°$.

Priminkite mokiniams, kaip kampo didumo apytikslę reikšmę apskaičiuojame skaičiuokliu: surenkame $0{,}8818$, tada funkciją $\cos^{-1}$ ir atsakymą matome ekrane.

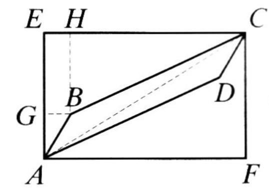
201. **c)** Pastebime, kad Ox yra trikampio simetrijos ašis ($BD = AD = 2$, $AB \perp DC$), tai trikampis ABC lygiašonis, $AC = BC$, $\angle A = \angle B$. Kraštinė $AB = 4$: AC ir $\angle A$ apskaičiuojame iš stataus trikampio ADC: $AC^2 = AD^2 + CD^2$, $AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $BC = AC = 2\sqrt{5}$. $\text{tg}\angle A = \frac{DC}{AD}$, $\text{tg}\angle A = 2$.
Kampo didumą apskaičiuojame skaičiuokliu. Gauname $\angle A = \angle B \approx 63{,}4°$, $\angle C \approx 53{,}2°$.
Kraštinių ilgius galime apskaičiuoti ir pagal formulę $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
Taškų koordinatės $A(-2; -2)$, $B(-2; 2)$, $C(2; 0)$, tai
$AC = BC = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{20}$,
$AB = \sqrt{(-2 - (-2))^2 + (2 - (-2))^2} = 4$.
Kampą C galėjome rasti ir pasinaudodami kosinusų teorema:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C$.
$\cos\angle C = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC}$, $\cos\angle C = \frac{20+20-16}{2 \cdot 20} = 0{,}6$,
$\angle C \approx 53°$, kadangi $\angle A = \angle B$, tai $2\angle A + \angle C = 180°$, $\angle A = \frac{180° - \angle C}{2}$, $\angle A \approx 63{,}5°$.
Šis sprendimo būdas ilgesnis, bet tiktų ir kitokio trikampio kraštinėms bei kampams apskaičiuoti (pvz. atvejais **b)** ir **d)**).
Atsakymai. **a)** $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, $\angle B \approx 53°$, $\angle C \approx 37°$;
b) $AC = \sqrt{26}$, $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{5}$, $\angle A \approx 56{,}3°$, $\angle B \approx 71{,}6°$, $\angle C \approx 52{,}1°$;
c) $AB = 4$, $AC = \sqrt{20}$, $\angle a = \angle B \approx 63{,}5°$, $\angle C \approx 53°$;
d) $AB = \sqrt{10}$, $BC = 2\sqrt{5}$, $AC = \sqrt{26}$, $\angle A \approx 60{,}3°$; $\angle B \approx 64{,}4°$; $\angle C \approx 55{,}3°$.



Patarkite mokiniams visada pasitikrinti, ar trikampio kampų suma yra 180°.

202. **c)** *Nurodymas.* Patikrinkite: jei $AC = BD$, tai $ABCD$ stačiakampis.
d) Viršūnių koordinatės $A(-5; -2)$, $B(-4; 0)$, $C(3; 3)$, $D(2; 1)$.
Apskaičiuojame kraštinių ilgius pagal formulę $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
$AB = CD = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{5}$,
$AD = BC = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{58}$.
Perimetras $P = 2(\sqrt{5} + \sqrt{58})$.
Lygiagretainio plotą apskaičiuojame pagal formulę $S = AB \cdot AD \cdot \sin\angle A$.
Kampo A ieškome iš trikampio ABD pagal kosinusų teoremą.
$BD = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{37}$.
$\cos\angle A = \frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD}$,
$\cos\angle A \approx 0{,}76$, $\angle A \approx 40{,}3°$.
$S = \sqrt{5} \cdot \sqrt{58} \cdot \sin 40{,}3°$, $S \approx 11$.

Galima spręsti ir kitaip.



Nubrėžiame statmenis AE ir CF taip, kad lygiagretainis $ABCD$ atsidurtų stačiakampyje $AECF$.

$S_{AECF} = 5 \cdot 8 = 40$, $S_{AEC} = 40 : 2 = 20$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CDA}$,

$S_{GBA} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, $S_{GBHE} = 1 \cdot 3 = 3$, $S_{HBC} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$.

$S_{ABC} = S_{AEC} - S_{AGB} - S_{GEHB} - S_{HBC} = 20 - 1 - 3 - \frac{21}{2} = 16 - \frac{21}{2}$.

$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot \left(16 - \frac{21}{2}\right) = 32 - 21 = 11$.

Atsakymai. **a)** $P = 14$, $S = 10$; **b)** $P = 8 + 2\sqrt{5}$, $S = 8$;
c) $P = 12\sqrt{2}$, $S = 16$; **d)** $P = 2\left(\sqrt{5} + \sqrt{58}\right)$, $S \approx 11$.

4. LYGTYS, LYGČIŲ SISTEMOS

4.1. Ekvivalenčios lygtys

Skyrelio teorinėje dalyje paaiškinta, kokios lygtys yra ekvivalenčios ir kokios lygties pertvarkos nekeičia lygties sprendinių. Šios sąvokos nėra naujos, todėl mokiniai gali savarankiškai išsinagrinėti vadovėlyje pateiktus pavyzdžius.

Skyrelio uždaviniais ir prie jų pateikta teorine medžiaga siekiama, kad mokiniai:

- *prisimintų*, kaip yra sprendžiamos ir *mokėtų* išspręsti tiesines lygtis;
- *žinotų*, kad tiesinė lygtis gali turėti vieną sprendinį, turėti be galo daug arba neturėti sprendinių;
- *mokėtų* spręsti įvairias (pilnąsias ir nepilnąsias) kvadratines lygtis;
- *žinotų*, kada kvadratinė lygtis turi du skirtingus sprendinius, vieną ar nei vieno sprendinio;
- *prisimintų* skaidymo dauginamaisiais būdus ir greitosios daugybos formules;
- skaidydami kairiąją lygties pusę dauginamaisiais, *spręstų* paprastas $P(x) = 0$ pavidalo lygtis;
- *žinotų*, kaip sprendžiamos racionaliosios lygtys;
- *gebėtų* pertvarkyti paprastas racionaliąsias lygtis į $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ pavidalo lygtį ir ją išspręsti;
- nesudėtingais atvejais *sudarytų lygtis* iš uždavinio sąlygos.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 215, 217–220.
Vidutinis lygmuo: 213, 214, 221–224.
Aukštesnysis lygmuo: 216, 222, 225–229.

213. **a)** Ne; **b)** ne; **c)** taip; **d)** taip.

214. **a)** $1\frac{22}{25}$; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** be galo daug sprendinių; **d)** sprendinių nėra.

215. **a)** 0; -3; **b)** 0; $1\frac{2}{3}$; **c)** ± 2; **d)** $\varnothing$; **e)** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; **f)** 0; **g)** 0;
h) -1; 0; **i)** ± 2.

216. **a)** Mokinys suklydo dalydamas iš x. Reikėjo spręsti taip:
$-5x^2 - 5x = 0$, $x^2 + x = 0$, $x \cdot (x + 1) = 0$,
tai $x = 0$ arba $x + 1 = 0$, iš čia $x = 0$, $x = -1$.
b) Turi būti $\sqrt{x^2} = |x|$, arba reikia spręsti taip:
$5x^2 = 45$, $x^2 = 9$, $x^2 - 9 = 0$,
$(x - 3)(x + 3) = 0$, tai $x - 3 = 0$ arba $x + 3 = 0$. Iš čia $x = 3$, $x = -3$.

Priminkite mokiniams
Lygties abi puses dalijant iš reiškinio su kintamuoju arba iš abiejų pusių traukiant lyginio laipsnio šaknį, galime prarasti lygties sprendinių.

217. **a)** -3; **b)** 2; **c)** 5; **d)** $\varnothing$; **e)** -2; $-\frac{1}{2}$; **f)** -3; 2; **g)** -3; 1;
h) $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{3}$; **i)** $\varnothing$.

218. **a)** -3; 0; 3; **b)** -2; 0; **c)** 0; 2.

219. **e)** Subendravardikliname ir sprendžiame:

$$\frac{x^2 - 5x - 15}{x(x + 3)} = 0;$$

$$x^2 - 5x - 15 = 0 \quad \text{ir} \quad x(x + 3) \neq 0;$$

$$x^2 - 5x - 15 = 0, \quad D = 25 - 60 = 85, \quad x_1 = \frac{5 - \sqrt{85}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{85}}{2}.$$

Trupmenos vardiklis lygus 0 tik, kai $x = 0$ ir $x = -3$.
g) Išskaidome skaitiklį dauginamaisiais:

$$x^2 - 25 = 0, \quad (x - 5)(x + 5) = 0, \quad x = 5 \quad \text{arba} \quad x = -5.$$

Kai $x = 5$, vardiklis $5 - 5 = 0$, tai $x = 5$ nėra lygties sprendinys.
Kai $x = -5$, vardiklis $-5 - 5 \neq 0$.

Atsakymai. **a)** -2; **b)** $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; **c)** 2; **d)** $-\frac{1}{2}$; **e)** $\frac{5-\sqrt{85}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{85}}{2}$;
f) $\pm\sqrt{\frac{8}{5}} = \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}$; **g)** -5; **h)** 2.

220. a) Vadovėlyje prie 219 uždavinio pateiktas vienas sprendimo būdas, bet šį uždavinį galima spręsti ir kitaip:

$$\frac{5}{x-1}+\frac{30}{x+1}=5 \,\Big|\cdot \frac{(x-1)(x+1)}{5}, \text{ laikome } x\neq \pm1;$$
$$\frac{5(x-1)(x+1)}{5(x-1)}+\frac{30(x-1)(x+1)}{5(x+1)}=\frac{5(x-1)(x+1)}{5};$$
$$x+1+6x-6=x^2-1,\quad x^2-7x+4=0,\quad D=49-16=33;$$

$x_1=\frac{7-\sqrt{33}}{2}$, $x_2=\frac{7+\sqrt{33}}{2}$.
Vardikliai lygūs 0 tik, kai $x=-1$ ir $x=1$.

Atsakymai. **a)** $x_1=\frac{7-\sqrt{33}}{2}$, $x_2=\frac{7+\sqrt{33}}{2}$; **b)** 0, 5; **c)** $\frac{2}{3}$, 5; **d)** 2, 3.

221. Lygtys ekvivalenčios ir atveju **a)**, ir atveju **b)**.

222. *Pavyzdžiai.* **a)** $3x=15$, $\frac{x^2-8x+15}{x^2-5x+6}=0$;
b) $x+7=0$ arba lygtį sudarome taip: $\frac{(x+7)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2+5x-14}{x^2-4}$;
c) $2x^2-10x+12=0$;
d) $(x+5)(x-3)=0$ arba $x^2+2x-15=0$;
e) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$;
f) $x(x+1)(x-1)(x-4)=0$ arba $(x^2-4x)(x^2-1)=0$.

223. **a)** Žodžiais nusakytą lygtį užrašome reiškiniu ir sprendžiame.

$$\frac{1}{x}+\frac{x}{x-4}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x-4}\,\Big|\cdot x(x-4),\quad x\neq 0,\ x\neq 4;$$
$$x-4+x^2=x,\quad x^2-4=0,\quad x=-2, x=2.$$

Kai $x=-2$ ar $x=2$, vardiklis nelygus 0.
b) Užrašome lygtį ir sprendžiame.

$$\frac{1}{y}-\frac{y}{y-1}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{y-1}\,\Big|\cdot y(y-1), \text{ laikome } y\neq 0,\ y\neq 1;$$
$$y-1-y^2=y,\quad -1-y^2=0,\quad y^2=-1.$$

Gautoji lygtis sprendinių neturi.
Atsakymai. **a)** -2; 2; **b)** sprendinių nėra.

224. **b)** Naudosime formulę $s=v\cdot t$, čia s — kelias, v — greitis, t — laikas. Valties savąjį greitį pasižymėsime x km/h, laiką $t=\frac{s}{v}$. Sudarome lentelę.

	s (km)	v (km/h)	t (h)
Pasroviui	26	$x+2$	$\frac{26}{x+2}$
Prieš srovę	9	$x-2$	$\frac{9}{x-2}$

Pagal sąlygą kelionė truko 3 h, o visas kelionės laikas yra $\left(\frac{26}{x+2}+\frac{9}{x-2}\right)$ h. Sudarome ir sprendžiame lygtį.

$$\frac{26}{x+2}+\frac{9}{x-2}=3 \mid\cdot(x-2)(x+2),\ x\neq\pm2;$$
$$26x-52+9x+18=3x^2-12;$$
$$3x^2-12-26x+52-9x-18=0;$$
$$3x^2-35x+22=0,\quad D=35^2-12\cdot22=961=31^2;$$
$$x_1=\frac{35-31}{6}=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{35+31}{6}=11.$$

Patikrinimas. Pagal uždavinio prasmę valties savasis greitis negali būti mažesnis už srovės greitį, todėl $x=\frac{2}{3}$, netinka. Prieš srovę plaukė $\frac{9}{11-2}=1$ h.
c) Katerio savąjį greitį pasižymėsime x km/h.

	s (km)	v (km/h)	t (h)
Pasroviui	5	$x+3$	$\frac{5}{x+3}$
Prieš srovę	12	$x-3$	$\frac{12}{x-3}$
Ežeru	18	x	$\frac{18}{x}$

Priminkite mokiniams

Kai dauginame iš reiškinio, kuriame yra kintamasis, laikome, kad jis nelygus nuliui. Mūsų atveju laikome, kad $x\neq 1$, $x\neq -1$.
Sprendžiant realaus turinio uždavinius, dažniausiai reikšmės $x=0$ ar neigiamos x reikšmės neturi prasmės. Tačiau dėl tvarkos ir tuo atveju verta nurodyti, kokios x reikšmės negali būti.

Patarimas

Lygčių sudarymo uždavinius galima būtų aiškinti pažingsniui.
- Sudarant lygtis, pravartu sąlygą užsirašyti sutrumpintai, susidaryti lentelę arba nusibraižyti brėžinį.
- Ieškomąjį dydį pasižymėti x.
- Sąlygoje aprašytą situaciją užsirašyti reiškiniais.
- Sulyginti reiškinius, sudaryti lygtį ir ją išspręsti.
- Lygties sprendinius patikrinti, ar tinka pagal prasmę uždavinio sąlygai.

Upe kateris plaukė $\left(\frac{5}{x+3}+\frac{12}{x-3}\right)$ h, ežeru — $\frac{18}{x}$ h, pagal sąlygą šie laikai lygūs:

$$\frac{5}{x+3}+\frac{12}{x-3}=\frac{18}{x};$$

$$\frac{5}{x+3}+\frac{12}{x-3}=\frac{18}{x}\ \Big|\cdot x(x-3)(x+3),\ x\neq 0,\ x\neq \pm 3;$$

$$5x(x-3)+12x(x+3)=18(x^2-9);$$

$$5x^2-15x+12x^2+36x=18x^2-162;$$

$$x^2-21x-162=0,\quad D=21^2+4\cdot 162=1089=33^2;$$

$x_1=\frac{21-33}{2}<0$ (netinka pagal sąlygą); $x_2=\frac{21+33}{2}=27.$

e) Upės tėkmės greitį pasižymėsime x km/h.

$s=vt$	s (km)	v (km/h)	t (h)
Prieš srovę	60	$21-x$	$\frac{60}{21-x}$
Pasroviui	60	$21+x$	$\frac{60}{21+x}$

Kelionės laiko prieš srovę ir pasroviui skirtumas $\left(\frac{60}{21-x}-\frac{60}{21+x}\right)$ h, pagal sąlygą yra 50 min $=\frac{50}{60}$ h $=\frac{5}{6}$ h.
Sudarome ir sprendžiame lygtį.

$$\frac{60}{21-x}-\frac{60}{21+x}=\frac{5}{6}\ \Big|\cdot 6(21-x)(21+x),\ x\neq\pm 21;$$

$$60\cdot 6(21+x)-60\cdot 6(21-x)=5(21^2-x^2);$$

$$60\cdot 6\cdot 21+360x-60\cdot 6\cdot 21+360x-2205+5x^2=0;$$

$$5x^2+720x-2205=0|:5,\ x^2+144x-441=0;$$

$$D=144^2+4\cdot 441=22\,500=150^2;$$

$x_1=\frac{-144-150}{2}<0$ (netinka pagal uždavinio prasmę), $x_2=\frac{-144+150}{2}=3.$

Atsakymai. **a)** Savasis valties greitis 12 km/h; **b)** Valties greitis stovinčiame vandenyje 11 km/h, prieš srovę plaukė 1 val.; **c)** Katerio greitis 27 km/h; **d)** Katerio savasis greitis 9 km/h arba 18 km/h; **e)** Upės tėkmės greitis 3 km/h.

Pastaba. Uždavinių 225 ir 229 siužetai atrodo visiškai skirtingi, bet matematiniu požiūriu tai vienas ir tas pats uždavinys.
Visas judėjimo kelias $s=v\cdot t$, čia v — greitis (kelias nueitas per laiko vienetą), t — laikas, $v=\frac{s}{t}$; $t=\frac{s}{v}$.
Visas atliktas darbas $A=d\cdot t$, čia d — darbo našumas (darbas atliktas per laiko vienetą), t — laikas, $d=\frac{A}{t}$; $t=\frac{A}{d}$.

225. a) Paprasto traukinio greitis — x km/h. Greitojo traukinio greitis — $(x+10)$ km/h. Paprastas traukinys 150 km nuvažiuoja per $\frac{150}{x}$ h, greitasis — per $\frac{150}{x+10}$ h.

229. a) Senųjų staklių našumas — x detalių/h. Naujųjų staklių našumas — $(x+10)$ detalių/h. 150 detalių senosiomis staklėmis pagamina per $\frac{150}{x}$ h, naujosiomis — per $\frac{150}{x+10}$ h.

Laiko skirtumas $\frac{150}{x}-\frac{150}{x+10}$ (h), pagal sąlygą tai yra 45 min $=\frac{45}{60}$ h $=\frac{3}{4}$ h.
Sudarome ir sprendžiame lygtį:

$$\frac{150}{x}-\frac{150}{x+10}=\frac{3}{4}\ \Big|\cdot\frac{4}{3}x(x+10),\ x\neq 0,\ x\neq -10,$$

$$50\cdot 4\cdot(x+10)-50\cdot 4\cdot x=x(x+10),$$

$$x^2+10x-2000=0,$$

$$x_1=\frac{-10-90}{2}<0\quad\text{(netinka pagal uždavinio prasmę)},$$

$$x_2=\frac{-10+90}{2}=40.$$

Atsakymas. Paprasto traukinio greitis 40 km/h, greitojo traukinio greitis 50 km/h;

Atsakymas. Senosiomis staklėmis pagamina 40 detalių per valandą. Naujosiomis staklėmis pagamina 50 detalių per valandą.

225. b) Andrius visą kelią nuvažiuoja per x val. Jurga visą kelią nuvažiuoja per $(x+2)$ val. Visas kelias yra s km. Andriaus greitis — $\frac{s}{x}$ km/h, Jurgos greitis — $\frac{s}{x+2}$ km/h. Per 2 h 55 min $= \frac{35}{12}$ h Andrius nuvažiuos $\frac{s}{x}\cdot\frac{35}{12}$ km, Jurga nuvažiuos $\frac{s}{x+2}\cdot\frac{35}{12}$ km. Abu kartu per $\frac{35}{12}$ h nuvažiuos visą kelią s.

Sudarome ir sprendžiame lygtį (laikome, kad visas kelias lygus 1):

229. b) I vamzdis baką pripildo per x val. II vamzdis baką pripildo per $(x+2)$ val. Bako tūris — V kubinių vienetų (kub. vnt.). I vamzdžio našumas — $\frac{V}{x}$ kub. vnt./h. II vamzdžio našumas — $\frac{V}{x+2}$ kub. vnt./h. I vamzdis per $\frac{35}{12}$ h pripildys $\frac{V}{x}\cdot\frac{35}{12}$ kub. vnt. II vamzdis per $\frac{35}{12}$ h pripildys $\frac{V}{x+2}\cdot\frac{35}{12}$ kub. vnt. Abu kartu per tą laiką pripildys visą baką.

Sudarome ir sprendžiame lygtį (laikome, kad bako talpa yra 1):

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{35}{12}+\frac{1}{x+2}\cdot\frac{35}{12}=1 \;\Big|\cdot 12x(x+2)\neq 0,\ x\neq 0,\ x\neq -2,$$

$$35(x+2)+35x=12x(x+2),$$

$$35x+70+35x=12x^2+24x,$$

$$6x^2+23x+35=0,$$

$$x_1=5,\quad x_2=-\frac{7}{6}\quad \text{(netinka pagal prasmę).}$$

Visą kelią Jurga nuvažiuos per $5+2=7$ val.

Atsakymas. Jurga pasieks miestą per 4 h 5 min.; Andrius pasieks stovyklavietę per 2 h 5 min.

Visą baseiną II vamzdis pripildys per $5+2=7$ val.

Atsakymas. I vamzdis baką pripildys per 5 h; II vamzdis per — 7 h.

226. Antroji darbininkė nuims derlių per x d., per 1 d. nuims $\frac{1}{x}$ derliaus. Pirmoji darbininkė nuims derlių per $(x+5)$ d., per 1 d. — $\frac{1}{x+5}$ derliaus dalį. Abi per 1 d. nuims $(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5})$ derliaus, per 4 d. nuims visą derlių (pažymime 1):

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}\right)\cdot 4=1 \Big|\cdot x(x+5)\neq 0,\ x\neq 0,\ x\neq -5;$$

$$4x+20+4x=x^2+5x,\quad x^2-3x-20=0,\quad D=89;$$

$$x_1=\frac{3-\sqrt{89}}{2}<0 \text{ — netinka pagal sąlygą, } x_2=\frac{3+\sqrt{89}}{2}\approx 6{,}2.$$

Atsakymas. Pirmoji — per 11,2 d., antroji — per 6,2 d.

Pastaba

Kaip matote, šio uždavinio atsakymai nėra labai gražūs. Mokiniams gali kilti klausimas, kam lygu 0,2 d. — ar tai $\frac{1}{5}$ nuo 24 valandų, ar nuo 8 valandų (įprastinės darbo dienos). Norint išvengti tokių diskusijų, siūlome sąlygoje pakeisti 5 į 6 — tada skaičiai bus „gražūs“.

227. a) Sąlygos trūksta dalies teksto. Pilna sąlyga turėjo būti tokia:

Iš pradžių mūrijo vienas darbininkas. Po 4 valandų prie jo prisijungė antras darbininkas. Kartu padirbėję 8 valandas, jie baigė mūryti sieną. Per kiek laiko sieną sumūrytų antrasis darbininkas, dirbdamas vienas, ***jei tą sieną jis sumūrytų 8 valandomis greičiau, negu pirmasis darbininkas****?*

Sprendimas.

Pirmasis darbininkas dirbdamas vienas sieną sumūrija per x valandų. Antrasis tą darbą padaro per $x+8$ valandas.

Per 1 valandą tie darbininkai, dirbdami atskirai sumūrys atitinkamai $\frac{1}{x}$ ir $\frac{1}{x+8}$ sienos dalį.

Pirmasis darbininkas dirbo $4+8=12$ valandų ir padarė $\frac{1}{x+8}\cdot 12=\frac{12}{x+8}$ darbo dalį.

Antrasis — dirbo 8 valandas ir padarė $\frac{1}{x}\cdot 8=\frac{8}{x}$ darbo dalį.

Per tą laiką jie sumūrijo visą sieną (pasižymime 1). Sudarome ir išsprendžiame lygtį:

$$\frac{12}{x+8}+\frac{8}{x}=1 \;\Big|\cdot (x+8)\cdot x,\ x\neq 0,\ x\neq -8;$$

$$20x+64=x^2+8x,\ x^2-12x-64=0,\ D=400;$$

$$x_1=\frac{12-20}{2}=-8 \text{ (netinka pagal uždavinio sąlygą);}$$

$$x_2=\frac{12+20}{2}=16.$$

Vadinasi, pirmasis darbininkas, dirbdamas vienas, sieną sumūrytų per 16 valandų.

b) Pirmasis darbininkas visą darbą atliks per x h, antrasis — per $x+1$ h 10 min $=$ $= \left(x + \frac{7}{6}\right)$h (1 h 10 min $= \frac{7}{6}$ h). Visą darbą laikome 1 (vienetu).
Pirmasis darbininkas per valandą padaro $\frac{1}{x}$ darbo, antrasis — $\frac{1}{x+\frac{7}{6}} = \frac{6}{6x+7}$ darbo. Pirmasis dirbo 2 h ir padarė $\frac{1}{x} \cdot 2$ darbo, antrasis dirbo $\left(2 + \frac{80}{60}\right)$ h $= \frac{10}{3}$ h ir padarė $\frac{6}{6x+7} \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{6x+7}$ darbo. Abu kartu atliko visą darbą.
Sudarome ir sprendžiame lygtį:

$$\frac{2}{x} + \frac{20}{6x+7} = 1 \;\Big|\; \cdot x(6x+7), \quad x \neq 0, \quad x \neq -\frac{7}{6};$$

$$\frac{2 \cdot x(6x+7)}{x} + \frac{20 \cdot x(6x+7)}{(6x+7)} = x(6x+7);$$

$$12x + 14 + 20x = 6x^2 + 7x;$$

$$6x^2 - 25x - 14 = 0;$$

$x_1 = \frac{25-31}{12} < 0$ (netinka pagal prasmę); $x_2 = \frac{25+31}{12} = 4\frac{2}{3}$.
Pirmasis darbininkas visą darbą atliks per 4 h 40 min, antrasis — per 4 h 40 min + 1 h 10 min = 5 h 50 min.

Atsakymai. **a)** 16 h, 24 h; **b)** 4 h 40 min, 5 h 50 min.

228. I-asis — per 12 h, II-asis — per 10 h.

4.2. Bikvadratinė lygtis

Šis skyrelis supažindina su neretai sutinkamomis bikvadratinėmis lygtimis ir jų sprendimu. Mokiniai supažindinami su plačiai matematikoje taikomu nežinomojo keitimo metodu, padedančiu supaprastinti lygtį.

Mokiniai turi:

- *atpažinti* bikvadratinę lygtį ir *mokėti* ją išspręsti;
- paprastais atvejais *taikyti* nežinomojo keitimo metodą, tinkamą ne tik bikvadratinėms lygtims spręsti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 230–232, 234.
Vidutinis lygmuo: 237, 238.
Aukštesnysis lygmuo: 235, 239.

230. **e)** Pertvarkome $-6x^4+54=0$ į $-6((x^2)^2-3^2)=0$
$-6(x^2-(\sqrt{3})^2)(x^2+3)=0$, $-6(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)=0$;
$x-\sqrt{3}=0$ arba $x+\sqrt{3}=0$, $x^2+3\neq 0$.
$x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$.
l) Galima parodyti ir tokį būdą: kiekvieną dėmenį dalijame iš 3
$x^4+\frac{2}{3}=1$, $x^4+\frac{2}{3}-1=0$, $x^4-\frac{1}{3}=0$;
$\left(x^2-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x^2+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=0$, $\left(x-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)\left(x^2+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=0$;
$x-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}=0$ arba $x+\sqrt[4]{\frac{1}{3}}=0$, $x^2+\sqrt{\frac{1}{3}}>0$ visoms x reikšmėms;
$x=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; $x=-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.
Atsakymai. **a)** -1; 1; **b)** ir **c)** $\varnothing$; **d)** $\pm\sqrt{2}$; **e)** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; **f)** $\varnothing$; **g)** $-\sqrt[4]{2}$; **h)** $\varnothing$; **i)** 0; **j)** ± 2; **k)** $\varnothing$; **l)** $-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.

Išvados
1) Kai $a>0$ ir $b>0$, arba $a<0$ ir $b<0$, lygtis $ax^4=b$ turi du sprendinius: $x=\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$ ir $x=-\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$.
2) Kai a ir b skirtingų ženklų, lygtis $ax^4=b$ sprendinių neturi.

231. **a)** -1; 0; 1; **b)** 0; **c)** -1; 0; 1; **d)** 0; **e)** -2; 0; 2; **f)** 0;
g) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 0; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; **h)** 0; **i)** $-\sqrt{\frac{3}{5}}$; 0; $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Išvados
1) Kai a ir b skirtingų ženklų, lygtis $ax^4+bx^2=0$ turi 3 sprendinius: $x=0$, $x=-\sqrt{\frac{b}{a}}$, $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$.
2) Kai a ir b vienodų ženklų, lygtis turi vieną sprendinį $x=0$.

232. Lygtys turi po keturis sprendinius. Sprendiniai po du yra vienas kitam priešingi skaičiai.
Atsakymai. **a)** -2; -1; 1; 2; **b)** $-\sqrt{2}$; -1; 1; $\sqrt{2}$; **c)** $-\sqrt{5}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$.

233. Lygtys turi po du sprendinius, — jie vienas kitam priešingi skaičiai.
Atsakymai. **a)** -2; 2; **b)** -1; 1; **c)** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

234. **1)** Bikvadratinė lygtis $ax^4+bx^2+c=0$ su tais pačiais koeficientais turės tik du sprendinius.
2) Bikvadratinė lygtis $ax^4+bx^2+c=0$ gali neturėti sprendinių, jei kvadratinės lygties su tais pačiais koeficientais abu sprendiniai yra neigiami.
3) Šią priklausomybę geriausia pavaizduoti tokia lentele:

$ay^2+by+c=0$		$ax^4+bx^2+c=0$
Diskriminantas	Sprendiniai	Sprendinių skaičius
$D<0$	nėra	nėra
$D=0$	$y_{1,2}>0$	2
$D=0$	$y_{1,2}<0$	nėra
$D>0$	$y_1<0$; $y_2<0$	nėra
$D>0$	$y_1<0$; $y_2>0$	2
$D>0$	$y_1>0$; $y_2>0$	4

Atsakymai. **a)** ± 1; **b)** ± 2; **c)** $\pm\sqrt{5}$.

235. Galima pasinaudoti 234 užduotyje sudaryta lentele.
b) Bikvadratinė lygtis turės du sprendinius, jei ją atitinkančios kvadratinės lygties $ay^2+by+c=0$ sprendiniai teigiami ir lygūs $y_1=y_2>0$. Pvz., tegul $y_1=y_2=2$, tai lygtis $(y-2)(y-2)=0$; $y^2-4y+4=0$, o atitinkama bikvadratinė lygtis bus $x^4-4x^2+4=0$.

236. Jei neįvestume naujo nežinomojo, tai spręsti reikėtų taip:
$$5(x^2-1)+\frac{1}{x^2-1}=6,\quad 5x^2-5+\frac{1}{x^2-1}-6=0;$$
$$5x^2-11+\frac{1}{x^2-1}=0\ \Big|\cdot(x^2-1),\ x\neq\pm 1;$$
$$5x^4-5x^2-11x^2+11+1=0,\quad 5x^4-16x^2+12=0.$$

Gavome bikvadratinę lygtį ir matome, kad be naujo kintamojo neapsieisime. Teks pasižymėti $x^2 = y$.

$5y^2 - 16y + 12 = 0, \quad D = 256 - 240 = 16;$

$y_1 = \dfrac{16+4}{10} = 2, \quad y_2 = \dfrac{16-4}{10} = 1{,}2;$

$x^2 = 2, \quad x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2};$

$x^2 = 1{,}2, \quad x_1 = -\sqrt{1{,}2}, \quad x_2 = \sqrt{1{,}2}.$

237. **a)** -1; 1; 2; 4; **b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

238. Pažymime $\sqrt{x-1} = y$, čia $y > 0$.

$y + \frac{1}{y} = 2 \mid \cdot y;$

$y^2 + 1 = 2y, \quad y^2 - 2y + 1 = 0;$

$(y-1)^2 = 0, \quad y - 1 = 0, \quad y = 1.$

Pakeliame abi lygties $\sqrt{x-1} = 1$ puses kvadratu, gauname

$x - 1 = 1; \quad x = 2.$

Patikrinimas. Įsistatome $x = 2$ į pradinę lygtį: $\sqrt{2-1} + \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 2.$

Atsakymas. 2.

239. Pažymime $\log_2 x = t$.

$t^2 + 5t + 6 = 0,$

$t_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$, $t_2 = \frac{-5+1}{2} = -2.$

Iš lygties $\log_2 x = t$ randame,

$\log_2 x = -3$, $x = 2^{-3}$, $x_1 = \frac{1}{8}$;

$\log_2 x = -2$, $x = 2^{-2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Atsakymas. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$.

4.3. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sprendimas

Reikėtų mokinius skatinti savarankiškai išsinagrinėti vadovėlyje pateiktus pavyzdžius, nes lygčių sistemų sprendimo būdai buvo nagrinėti pagrindinės mokyklos kurse.

Mokiniai turi mokėti *pasirinkti ir taikyti* keitimo ar sudėties būdą lygčių sistemoms spręsti.
Sudėties būdu geriau spręsti tiesinių lygčių sistemas, o keitimo būdu — lygčių sistemas, kurių viena lygtis tiesinė, o kita — kvadratinė.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 240, 241.
Vidutinis lygmuo: 242–245.

240. **a)** $\left(\frac{13}{17}; \frac{14}{17}\right)$; **b)** $(-0{,}4; 0{,}2)$; **c)** $\left(\frac{11}{7}; \frac{9}{14}\right)$; **d)** $\left(\frac{1}{5}; 0\right)$.

241. **a)** $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$; **b)** $(0; 3)$;
c) $\left(\frac{-38-2\sqrt{31}}{15}; \frac{-32-8\sqrt{31}}{15}\right)$; $\left(\frac{-38+2\sqrt{31}}{15}; \frac{-32+8\sqrt{31}}{15}\right)$.

242. I skaičius — x, II skaičius — y, jų suma — $x + y = 15$. Dvigubas I skaičius lygus $2x$. Skaičių skirtumas bus $2x - y = 6$.

Sudarome lygčių sistemą: $\begin{cases} x + y = 15, \\ 2x - y = 6. \end{cases}$

Ją spręsime sudėties būdu:

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ \underline{2x - y = 6;} \end{cases}$$

$3x = 21$; $x = 7$, $y = 8$.

Galima spręsti ir keitimo būdu:
$y = 15 - x$, $2x - 15 + x = 6$, $3x = 21$.
Atsakymas. Pirmas skaičius — 7, antras — 8.

243. 11 ir 10 arba -11 ir -10.

244. Šį uždavinį galima spręsti su dviem kintamaisiais.
Pažymėkime stačiakampio ilgį x m, plotį y m, tada perimetras $2(x + y) = 100$, o plotas $xy = 600\,\text{m}^2$. Sudarome lygčių sistemą: $\begin{cases} x + y = 50, \\ xy = 600. \end{cases}$

Ją spręsime keitimo būdu $\begin{cases} x = 50 - y, \\ (50 - y)y = 600; \end{cases}$

$y^2 - 50y + 600 = 0$;
$y_1 = \frac{50-10}{2} = 20$; $y_2 = \frac{50+10}{2} = 30$.
$x_1 = 50 - 20 = 30$; $x_2 = 50 - 30 = 20$.

Atsakymas. Stačiakampio matmenys 20 m ir 30 m.

245. Vienas aikštelės matmuo x m, kitas y m. Aikštelės kraštas (perimetras) yra $2(x + y) = 26$, plotas $xy\,\text{m}^2$.
Pailgėjęs matmuo — $(x + 1)$ m, sutrumpėjęs — $(y - 2)$ m, naujasis plotas — $(x+1)(y-2)$. Jis $4\,\text{m}^2$ mažesnis už senąjį plotą, todėl $(x+1)(y-2) = xy - 4$.
Sudarome ir sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x + y = 13, \\ (x + 1)(y - 2) = xy - 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 13, \\ xy - 2x + y - 2 = xy - 4; \end{cases}$$

Sudedame lygtis:

$$\begin{cases} x + y = 13, \\ \underline{2x - y = 2;} \end{cases}$$

$3x = 15$

$x = 5$, $5 + y = 13$, $y = 8$.

Atsakymas. Aikštelės matmenys yra 5 m ir 8 m.

4.4. Geometrijos uždaviniai

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

246. Palyginimui sudarome lentelę.

Figūra	Kraštinė (spindulys)	$P = 12$ metrų Plotas (m^2)	$P = 13$ metrų Plotas (m^2)
Trikampis	$a_3 = \frac{12}{3} = 4$	$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 \approx 6{,}9$	$S_3 \approx 8{,}1$
Kvadratas	$a_4 = \frac{12}{4} = 3$	$S_2 = a^2 = 3^2 = 9$	$S_4 \approx 10{,}6$
Šešiakampis	$a_6 = \frac{12}{6} = 2$	$S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \approx 10{,}4$	$S_6 \approx 12{,}2$
Apskritimas	$r = \frac{P}{2\pi} = \frac{12}{12\pi} = \frac{6}{\pi}$	$S_{\text{skr.}} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{36}{\pi^2} \approx 11{,}5$	$S_{\text{skr.}} \approx 13{,}5$

3) Nuspalvintos figūros plotas yra rastų plotų skirtumas:
$S_{F3} = 8{,}1 - 6{,}9 = 1{,}2\,(\text{m}^2)$; $S_{F4} = 10{,}6 - 91 = 1{,}6\,(\text{m}^2)$;
$S_{F6} = 12{,}2 - 10{,}4 = 1{,}8\,(\text{m}^2)$; $S_{Fskr.} = 13{,}5 - 11{,}5 = 2{,}0\,(\text{m}^2)$.

4) Kaspino ilgis lygus apskritimo ilgiui $C = 2\pi r$, o spindulys $r = \frac{C}{2\pi}$.

Patarimas

246 uždavinio sprendimui galima pasinaudoti 189 uždavinio sprendimo rezultatais. Šiuo atveju $a = 12$ m ir $a = 13$ m.

	Kamuolys	Žemė
Pradinis kaspino ilgis	$2\pi \cdot 0{,}3$ m	$2\pi \cdot 6400$ km
Pailgintas kaspinas	$(2\pi \cdot 0{,}3 + 1)$ m	$(2\pi \cdot 6400 + 0{,}001)$ km
Naujas spindulys	$r_1 = \frac{2\pi \cdot 0{,}3+1}{2\pi} = \left(0{,}3 + \frac{1}{2\pi}\right)$ m	$R_1 = \frac{2\pi \cdot 6400+0{,}001}{2\pi} = \left(6400 + \frac{0{,}001}{2\pi}\right)$ km
Susidariusio tarpo plotis	$x = r_1 - r$ $x = 0{,}3 + \frac{1}{2\pi} - 0{,}3 = \frac{1}{2\pi}$ m	$y = R_1 - R$ $y = 6400 + \frac{0{,}001}{2\pi} - 6400 = \frac{0{,}001}{2\pi}$ km

Kadangi $\frac{0{,}001}{2\pi}$ km $= \frac{1}{2\pi}$ m, susidaręs tarpas tarp kamuolio ir kaspino yra toks pats, kaip tarp Žemės ir pailginto kaspino.

5. NELYGYBĖS

5.1. Tiesinės nelygybės

Vertėtų mokiniams priminti, kad tiesinės funkcijos $f(x) = ax+b$ reikšmių ženklas keičiasi *tik vieną kartą*, kai funkcijos grafikas kerta x ašį, t. y. kai $ax + b = 0$. Išnagrinėję šiame skyrelyje pateiktą medžiagą, mokiniai turėtų:

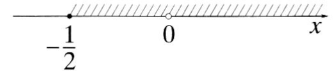
- *žinoti*, ką reiškia išspręsti nelygybę;
- *mokėti* ekvivalenčiai pertvarkyti tiesines nelygybes į $A(x) * 0$ (čia $*$ reiškia $<$, $>$, $\geqslant$, $\leqslant$) pavidalo nelygybes ir jas išspręsti;
- *pavaizduoti* tiesinių nelygybių ir jų sistemų sprendinius skaičių intervalu;
- dvigubą nelygybę *užrašyti* nelygybių sistema;
- *suprasti* ryšį tarp tiesės $y = ax + b$ padėties ir nelygybių $ax + b * 0$ sprendinių.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 258, 260.
Vidutinis lygmuo: 259, 262, 263a–c.
Aukštesnysis lygmuo: 261, 263d.

258. **a)** $(-\infty; -1)$; **b)** $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right]$; **c)** $(1; +\infty)$; **d)** $\left[1\frac{1}{2}; +\infty\right)$; **e)** $\left(-\infty; \frac{\sqrt{3}-1}{14}\right]$.

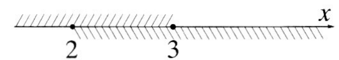
259. **c)** $2x\sqrt{5-2x}$ turi prasmę, kai $5 - 2x \geqslant 0$, $-2x \geqslant 5$, $x \leqslant 2{,}5$.
d) $\frac{\sqrt{2x+1}}{x}$ turi prasmę, kai $2x + 1 \geqslant -1$, $x \geqslant -\frac{1}{2}$ ir $x \neq 0$.
Galimas reikšmes pasižymime skaičių ašyje.



e) Nelyginio laipsnio šaknis turi prasmę, kai pošaknis bet koks skaičius. Vadinasi, tinka visos x reikšmės.
h) Reiškinys turi prasmę, kai abu pošakniai yra neneigiami:

$$\begin{cases} 3 - x \geqslant 0, \\ 5x - 10 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -x \geqslant -3, \\ 5x \geqslant 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Bendrus sprendinius galime rasti atidėję reikšmes skaičių tiesėje.



Atsakymai. **a)** $[-3; +\infty)$; **b)** $[5; +\infty)$; **c)** $(-\infty; 2{,}5]$; **d)** $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$; **e)** $x \in R$; **f)** $(-\infty; 1{,}2]$; **g)** $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$; kitaip $x \in R$ ir $x \neq -3$; **h)** $[2; 3]$.

260. **a)** $(0; +\infty)$; **b)** $(0; +\infty)$; **c)** $(0; +\infty)$; **d)** $(-\infty; 0)$; **e)** $(-\infty; 0)$; **f)** $(-\infty; 0)$; **g)** $(-2; +\infty)$; **h)** $(1; +\infty)$; **i)** $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$; **j)** $(-\infty; 2)$; **k)** $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$; **l)** $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

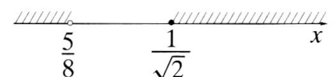
261. **b)** Kai $x \in (-\infty; -1)$, tiesė $y = ax + b$ yra žemiau x ašies, o taške $x = -1$ kerta x ašį, t. y. $y = 0$, kai $x = -1$. Taigi, y (funkcijos) reikšmės *neteigiamos*, kai $x \in (-\infty; -1]$. Mokinys sprendė nelygybę $ax + b \leqslant 0$.
c) Kai $x \in (2; +\infty)$, tiesė $y = ax + b$ yra virš x ašies, o taške $x = 2$, $y = 0$, taigi y (funkcijos) reikšmės *neneigiamos*, kai $x \in [2; +\infty)$. Mokinys sprendė nelygybę $ax + b \geqslant 0$.
Atsakymai. **a)** $x > 0$; **b)** $x + 1 \leqslant 0$; **c)** $\frac{1}{2}x - 1 \geqslant 0$; **d)** $-x \geqslant 0$; **e)** $-x + 2 < 0$; **f)** $-3x - 3 \geqslant 0$.

262. **c)** $\begin{cases} 2(\frac{1}{8} - 0{,}2x) > 0. \\ -3(x\sqrt{2} - 1) \leqslant 0. \end{cases}$

Sandauga teigiama, kai abu dauginamieji vienodų ženklų. Kadangi, $2 > 0$, tai ir $\frac{1}{8} - 0{,}2x > 0$,
Sandauga neteigiama, kai abu dauginamieji skirtingų ženklų arba lygūs nuliui. Kadangi $-3 < 0$, tai $x\sqrt{2} - 1 \geqslant 0$;

$$\begin{cases} -0{,}2x > -\frac{1}{8}| \cdot (-5), \\ \sqrt{2}x \geqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{5}{8}. \\ x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

Skaičiuokliu pasitikriname, kuri trupmena didesnė: $\frac{5}{8} = 0{,}625$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$, todėl $\frac{5}{8} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Atidėję reikšmes skaičių spindulyje, matome, kad bendrų sprendinių nėra.



Atsakymai. **a)** $(4; 10]$; **b)** $[11{,}5; +\infty)$; **c)** nėra; **d)** nėra.

263. **d)** Kadangi skaičiaus modulis yra neneigiamas skaičius, t. y. $|x| \geqslant 0$, tai vienintelė x reikšmė tenkinanti nelygybę yra $x = 0$.
Atsakymai. **a)** $(1{,}5; +\infty)$; **b)** $\left[-\frac{2}{9}; \frac{1}{2}\right)$; **c)** nėra; **d)** $\{0\}$.

Norėdami išspręsti nelygybę $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) * 0$ (čia $*$ reiškia $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$) mokiniai turi:

- *žinoti*, kaip sandaugos ženklas priklauso nuo dauginamųjų ženklų;
- *mokėti* sudaryti tiesinių nelygybių sistemas $\begin{cases} a_1x + b_1 * 0, \\ a_2x + b_2 * 0 \end{cases}$ ir jas išspręsti.

Nelygybę $ax^2 + bx + c * 0$ mokiniai gali spręsti išskaidydami kvadratinį trinarį dauginamaisiais arba pasinaudoti kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafiko eskizu. Todėl mokiniai turėtų mokėti:

- *išskaidyti* kvadratinį trinarį dauginamaisiais:
- *nusibraižyti* kvadratinės funkcijos grafiko eskizą (žymimi tik taškai, kuriuose parabolė kerta x ašį (jei kerta) ir parabolės šakų kryptis);
- *iš grafiko nustatyti* kvadratinio trinario ženklą.

Pastaba. Nelygybės $ax^2 + bx + c * 0$ sprendimą, pasinaudojant parabolės grafiko eskizu, galima priminti nagrinėjant 191, 192, 195 uždavinių sprendimo pavyzdžius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

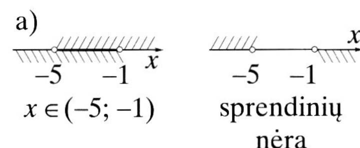
Minimalus lygmuo: 264, 265, 266a–d, 267.
Vidutinis lygmuo: 266e–g.
Aukštesnysis lygmuo: 268, 269.

264. a) Sandauga neigiama, kai abu dauginamieji skirtingų ženklų:

$\begin{cases} x + 5 > 0, \\ x + 1 < 0; \end{cases}$ arba $\begin{cases} x + 5 < 0, \\ x + 1 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > -5, \\ x < -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -5, \\ x > -1. \end{cases}$

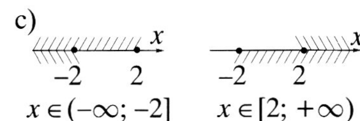
Atidedame reikšmes skaičių ašyje ir randame sprendinius. Matome, kad antroji sistema sprendinių neturi, todėl duotosios nelygybės sprendiniai yra pirmosios sistemos sprendinių *sąjunga*, tai yra intervalas $(-5; -1)$.



c) Sandauga neneigiama, kai abu dauginamieji vienodų ženklų arba bent vienas dauginamasis lygus nuliui:

$\begin{cases} x - 2 \leqslant 0, \\ x + 2 \leqslant 0; \end{cases}$ arba $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ x + 2 \geqslant 0; \end{cases}$

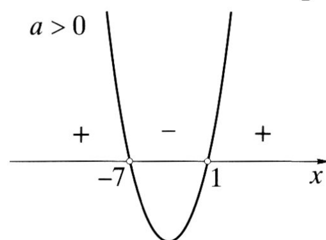
$\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \leqslant -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$



Sprendinius patogu vaizduoti skaičių ašyje. Tai bus abiejų sistemų sprendinių sąjunga $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Atsakymai. **a)** $(-5; -1)$; **b)** $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; **c)** $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; **d)** $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$; **e)** $(-1{,}25; 0{,}5)$; **f)** $(-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$; **g)** $\left(0; \frac{5}{14}\right)$; **h)** $(-\infty; -6\frac{3}{7}) \cup (0; +\infty)$.

265. a) Randame kvadratinio trinario $x^2 + 6x - 7 = 0$ šaknis ir nusibraižome jo grafiko (parabolės) eskizą:
$x^2 + 6x - 7 = 0$, $x_1 = \frac{-6-8}{2} = -7$, $x_2 = \frac{-6+8}{2} = 1$.



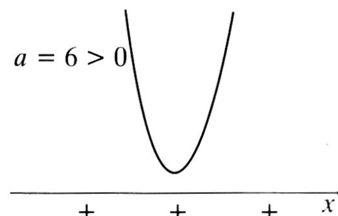
Iš grafiko matome, kad: $x^2 + 6x - 7 < 0$, kai $x \in (-7; 1)$, o $x^2 + 6x - 7 \geqslant 0$, kai $x \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

d) $6x^2 + 5x + 6 = 0$, $D = 25 - 4 \cdot 36 < 0$.
Kvadratinis trinaris šaknų neturi, todėl jo grafikas nekerta x ašies. Kadangi parabolės šakos nukreiptos į viršų $(6 > 0)$, tai trinario reikšmės tik teigiamos.

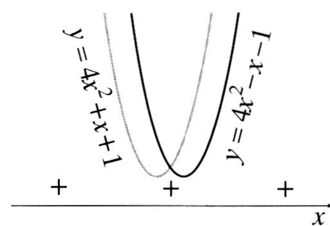
Atsakymai. **a)** $(-7; 1)$; $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$;
b) $(-\infty; -5] \cup [-2; +\infty)$; $[-5; -2]$;
c) $[4; 6]$; $(-\infty; 4) \cup (6; +\infty)$;
d) $(-\infty; +\infty)$; II nelygybė sprendinių neturi;
e) $(-\infty; 1{,}5) \cup (5; +\infty)$, $(1{,}5; 5)$;
f) $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$; $(-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Priminkite mokiniams

- Jei kvadratinis trinaris ax^2+bx+c turi šaknis x_1 ir x_2, tai parabolė kerta x ašį taškuose x_1 ir x_2, o parabolės šakos eina aukštyn, kai $a > 0$ ir žemyn, kai $a < 0$.
- Jei kvadratinis trinaris ax^2+bx+c neturi šaknų, tai parabolė nekerta x ašies. Tuomet su visomis x reikšmėmis kvadratinio trinario reikšmės yra teigiamos, kai $a > 0$ ir neigiamos, kai $a < 0$.



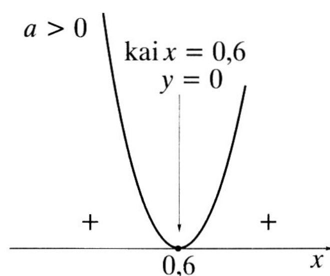
266. **e)** Turime nelygybes:
I. $4x^2 - x + 1 < 0$;
II. $-4x^2 - x - 1 \geqslant 0 \mid \cdot (-1)$, $4x^2 + x + 1 \leqslant 0$.
Ieškome kvadratinių trinarių $4x^2 - x + 1$ ir $4x^2 + x + 1$ šaknų.
Kadangi $D = 1 - 16 < 0$, šie trinariai šaknų neturi. Kadangi koeficientas prie x^2 yra teigiamas ($4 > 0$), tai parabolės $y = 4x^2 - x + 1$ ir $y = 4x^2 + x + 1$ yra virš x ašies, o nelygybės $4x^2 - x + 1 < 0$ ir $4x^2 + x + 1 \leqslant 0$ sprendinių neturi.



Atsakymai.
a) I — $(-\infty; +\infty)$; II — sprendinių nėra;
b) I — sprendinių neturi; II — $(-\infty; +\infty)$;
c) I — $(-\infty; +\infty)$; II — sprendinių nėra;
d) I — sprendinių neturi; II — $(-\infty; +\infty)$;
e) I — sprendinių neturi; II — sprendinių neturi;
f) I — $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; II — $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$;
g) I — sprendinių neturi; II — $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

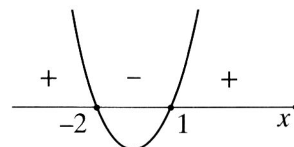
267. **a)** Pastebime, kad $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.
Nelygybes galima užrašyti taip: $(x + 2)^2 \geqslant 0$; $(x + 2)^2 \leqslant 0$.
Skaičiaus kvadratas yra neneigiamas skaičius, t. y. teigiamas arba lygus nuliui, tai $(x + 2)^2 \geqslant 0$ visoms x reikšmėms, o $(x + 2)^2 \leqslant 0$ teisinga tik tada, kai $x + 2 = 0$.

d) I. $-25x^2 + 30x - 9 \leqslant 0$, $25x^2 - 30x + 9 \geqslant 0$.
II. $25x^2 - 30x + 9 \leqslant 0$.
Galima atkreipti mokinių dėmesį, kad $25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2$, bet galima spręsti ir standartiniu būdu:
$25x^2 - 30x + 9 = 0$, $D = 900 - 25 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, $x_{1,2} = \frac{30+0}{50} = 0{,}6$.
Lygtis turi vieną sprendinį, tad trinario grafikas liečia x ašį taške $x = 0{,}6$.



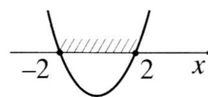
Atsakymai. **a)** $(-\infty; +\infty)$, $\{-2\}$; **b)** $\varnothing$, $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$; **c)** $(-\infty; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$, $\{1{,}5\}$; **d)** $(-\infty; +\infty)$, $\{0{,}6\}$; **e)** $\varnothing$, $(-\infty; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$.

268. **1)** Kvadratinis trinaris skaidomas taip $ax^2 + x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Sąlygoje $a = -1$, todėl nelygybė turi būti tokia: $-(x-1)(x-2) \geqslant 0$. Mokinys suklydo neparašęs minuso ženklo.
2) Mokinys moka išspręsti kvadratinę lygtį, teisingai sudarė ir išsprendė nelygybių sistemas, parašė atsakymą. Žino, kaip kvadratinį trinarį skaidyti dauginamaisiais, tik neparašė -1 prieš skliaustus. Siūlome rašyti 8.
3) Geriau nelygybės abi puses padauginti iš -1 sprendimo pradžioje.
$-x^2 - x + 2 \geqslant 0 | \cdot (-1)$, $x^2 + x - 2 \leqslant 0$;
$x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.
Brėžiame grafiką ir nustatome kvadratinio trinario ženklus intervaluose.

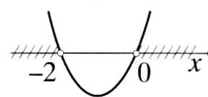


Atsakymas. $[-2; 1]$.

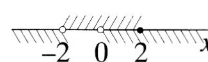
269. **a)** Sprendžiame kiekvieną sistemos nelygybę ir ieškome jų bendrų sprendinių (intervalų sankirtos).
1) $x^2 \leqslant 4$, $x^2 - 4 \leqslant 0$, $(x - 2)(x + 2) \leqslant 0$, $x \in [-2; 2]$.



2) $x^2 + 2x > 0$, $x(x + 2) > 0$, $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.



3) Randame abiejų nelygybių bendruosius sprendinius:
$$\begin{cases} x \in [-2; 2], \\ x \in (-\infty; 2) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 2].$$



Atsakymai. **a)** $(0; 2]$; **b)** sprendinių nėra; **c)** $[6; +\infty)$; **d)** $[0; 1)$.

Racionaliąsias nelygybes, kaip ir kvadratines, galima spręsti pertvarkant į nelygybių sistemas. Išnagrinėję skyrelį, mokiniai turėtų:

- *žinoti*, kaip nuo skaitiklio ir vardiklio ženklo priklauso trupmenos ženklas;
- *gebėti* paprasčiausiais atvejais racionaliąją nelygybę pertvarkyti į $\frac{P(x)}{Q(x)} * 0$ (čia $*$ reiškia $>$, $<$, $\geqslant$ arba $\leqslant$) pavidalo nelygybę.
- *mokėti*, susidarydami nelygybių sistemas ar kitaip. išspręsti nelygybes $\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} * 0$;
- *pastebėti*, kad nelygybės $\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} * 0$ ir $\frac{a_2x+b_2}{a_1x+b_1} * 0$ turi tuos pačius sprendinius.

Pastaba. Reikia atkreipti mokinių dėmesį, kad pertvarkant nelygybes, negalima abiejų nelygybės pusių dauginti iš vardiklyje esančio reiškinio su nežinomuoju.

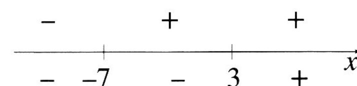
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 270.
Vidutinis lygmuo: 271, 274.
Aukštesnysis lygmuo: 272, 273, 275.

270. c) Sunumeruokime nelygybes:
(1) $\frac{x+7}{x-3} < 0$; (2) $\frac{x+7}{x-3} > 0$; (3) $\frac{x+7}{x-3} \leqslant 0$; (4) $\frac{3-x}{x+7} \geqslant 0$.
(4) nelygybės abi puses padauginkime iš -1 (nors tai nebūtina):

$$\frac{3-x}{x+7} \geqslant 0 | \cdot (-1); \quad \frac{x-3}{x+7} \leqslant 0.$$

Nustatome, su kokiomis x reikšmėmis trupmenos skaitiklis yra neigiamas ir su kokiomis — teigiamas:
$x-3=0$, kai $x=3$; $x-3>0$, kai $x>3$; $x-3<0$, kai $x<3$.
Nustatome, su kokiomis x reikšmėmis trupmenos vardiklis yra neigiamas, su kokiomis — teigiamas:
$x+7=0$, kai $x=-7$; $x+7>0$, kai $x>-7$; $x+7<0$, kai $x<-7$.
Skaičių ašyje pasižymime dvinarių $x+7$ (virš ašies) ir $x-3$ (žemiau ašies) ženklus intervaluose.

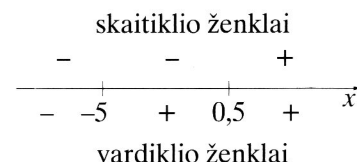


Ženklai skirtingi, kai $-7 < x < 3$, tai (1) nelygybės sprendiniai $x \in (-7; 3)$.
Ženklai vienodi, kai $x < -7$, arba $x > 3$, tai (2) nelygybės sprendiniai $x \in (-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$.
Ženklai skirtingi, kai $-7 < x < 3$, o trupmena lygi nuliui, kai $x=-7$, tai (3) nelygybės sprendiniai $x \in [-7; 3)$.
Ženklai skirtingi, kai $-7 < x < 3$, o trupmena lygi nuliui, kai $x=3$, tai (4) nelygybės sprendiniai $x \in (-7; 3]$.
e) Sunumeruokime nelygybes:
(1) $-\frac{2-4x}{5x+25} > 0$; (2) $\frac{2-4x}{5x+25} < 0$; (3) $\frac{4x-2}{5x+25} < 0$; (4) $\frac{4x-2}{5x+25} \leqslant 0$;
(5) $\frac{5x+25}{4x-2} \geqslant 0$.
(1) ir (2) nelygybes galime persitvarkyti taip, kad nelygybių skaitiklio reiškinių ženklai būtų vienodi. Pamatysime, kad tai ta pati nelygybė.

$$-\frac{2-4x}{5x+25} = \frac{-(2-4x)}{5x+25} = \frac{4x-2}{5x+25}; \quad \frac{4x-2}{5x+25} > 0; \quad (1)$$

$$\frac{2-4x}{5x+25} < 0 \Big| \cdot (-1); \quad \frac{4x-2}{5x+25} > 0. \quad (2)$$

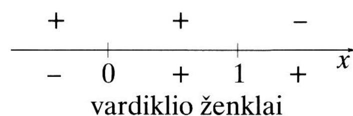
Nustatome trupmenų skaitiklio ir vardiklio ženklus:
$4x-2=0$, kai $x=0{,}5$; $4x-2>0$, kai $x>0{,}5$ ir $4x-2<0$, kai $x<0{,}5$.
$5x+25=0$, kai $x=-5$; $5x+25>0$, kai $x>-5$ ir $5x+25<0$, kai $x<-5$.



Atsakymai. **a)** $(0; +\infty)$; $(0; +\infty)$; $[0; +\infty)$; $(0; +\infty)$;
b) $(-\infty; -0{,}5) \cup (0; +\infty)$; $(-0{,}5; 0)$; $(-\infty; -0{,}5] \cup (0; +\infty)$; $[-0{,}5; 0)$;
c) $(-7; 3)$; $(-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$; $[-7; 3)$; $(-7; 3]$;
d) $(-\infty; -5) \cup [0{,}2; +\infty)$; $(-\infty; -5) \cup [0{,}2; +\infty)$; $(-5; 0{,}2)$;
e) $(-\infty; -5) \cup (0{,}5; +\infty)$; $(-\infty; -5) \cup (0{,}5; +\infty)$; $(-5; 0{,}5)$; $(-5; 0{,}5]$; $(-\infty; -5] \cup (0{,}5; +\infty)$.

271. a) Pertvarkome nelygybes taip, kad kairėje pusėje būtų reiškinys su nežinomuoju, o dešinėje — nulis.
(1) $\frac{1-x}{x} \geqslant 0$; (2) $\frac{1-x}{x} \geqslant 0$; (3) $\frac{1-x}{x} < 0$; (4) $-\frac{x}{2} < 0 \Big| \cdot (-2)$, $x > 0$.

Nustatome skaitiklio ir vardiklio ženklus:
$1 - x = 0$, kai $x = 1$, $1 - x > 0$, kai $x < 1$ ir $1 - x < 0$, kai $x > 1$.
Pasižiūrėję į skaitiklio ir vardiklio ženklus parašome atsakymus.



Atsakymai. **a)** $(0; 1]$, $(0; 1]$, $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, $(0; +\infty)$;
b) $(-\infty; 0) \cup [2{,}5; +\infty)$, $(-\infty; -2{,}5] \cup (0; +\infty)$, $(-2{,}5; 0)$.

272. **b)** Užsirašome atitinkamas lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} 5x + 10 \leqslant 0, \\ |x| > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + 10 \geqslant 0, \\ |x| < 0. \end{cases}$

Antroji sistema prasmės neturi, nes $|x| < 0$ būti negali. Todėl užtenka išspręsti pirmąją:
$5x \leqslant -10$, $x \leqslant -2$ ir $x \in R/\{0\}$.
Vadinasi, pirmąją nelygybę tenkina visi $x \in (-\infty; -2]$.

2) $\begin{cases} 5x + 10 > 0, \\ |x| > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + 10 < 0, \\ |x| < 0. \end{cases}$

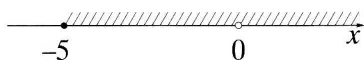
Vėl nereikia spręsti antrosios sistemos. Tuo tarpu pirmąją tenkina visos x reikšmės didesnės už -2, išskyrus 0.
Atsakymai. **a)** $(-\infty; 0) \cup (0; 1{,}5)$, $(1{,}5; +\infty)$;
b) $(-\infty; 2]$, $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

273. **a)** $[1; +\infty)$; **b)** $(-5; -2) \cup [2; 5)$.

274. **c)** Funkcijos $\frac{5}{x} + \sqrt{x + 5}$ apibrėžimo sritį D_f sudaro x reikšmės, kurios tenkina sąlygas:

$\begin{cases} x \neq 0, \\ x + 5 \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \geqslant -5. \end{cases}$

Atidedame šias reikšmes skaičių ašyje.

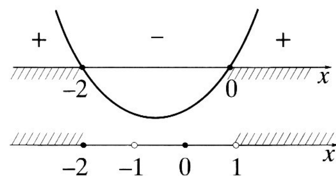


Priminkite mokiniams
Funkcijos apibrėžimo sričiai priklauso tos argumento reikšmės su kuriomis funkciją nusakantis reiškinys turi prasmę. Trupmena turi prasmę, kai jos vardiklis nelygus nuliui, o lyginio laipsnio šaknis — kai pošaknis neneigiamas.

d) Funkcijos $\sqrt{x^2 + 2x} - \frac{5x}{x^2 - 1}$ apibrėžimo sritį D_f sudaro tos argumento reikšmės, kurios tenkina sąlygas:

$\begin{cases} x^2 + 2x \geqslant 0, \\ x^2 - 1 \neq 0. \end{cases}$

$x^2 + 2x = 0$, $x(x + 2) = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.
Braižome parabolę $y = x^2 + 2x$.
$x^2 + 2x \geqslant 0$, kai $x \leqslant -2$ arba $x \geqslant 0$.
$x^2 - 1 \neq 0$, $(x - 1)(x + 1) \neq 0$, kai $x \neq 1$, $x \neq -1$.
Abi sąlygas pasižymime skaičių ašyje.



Atsakymai. **a)** $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; **b)** $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$;
c) $[-5; 0) \cup (0; +\infty)$; **d)** $(-\infty; -2] \cup [0; 1) \cup (1; +\infty)$.

275. Pavyzdžiui:

a) $\frac{x}{x^2+1} > 0$; **b)** $\frac{2}{x-5} > 0$; **c)** $\frac{2x-x^2-5}{6x-2x^2-7} < 0$; **d)** $\frac{4-x}{x+3} \geqslant 0$.

Paprasčiausia sugalvoti racionaliąją nelygybę **a)** ir **b)** atvejams, kai vardiklio ar skaitiklio ženklas pastovus. Atveju **c)** ir skaitiklio, ir vardiklio ženklai teigiami arba neigiami.

5.4. Geometrijos uždaviniai

Skyrelyje kartojamas trikampių panašumas. Be vadovėlyje pateikto trikampių panašumo apibrėžimo ir požymių, dar reikėtų pakartoti ir kryžminių, gretutinių kampų bei kampų, gautų dvi lygiagrečias tieses perkirtus trečiąja, savybes.

Vertėtų atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad panašiųjų trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui, o plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 276, 277, 279.
Vidutinis lygmuo: 278.
Aukštesnysis lygmuo: 280.

276. **a)** $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6 = 140°$, $\angle 2 = \angle 5 = \angle 7 = 40°$;
b) $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6 = 30°$, $\angle 2 = \angle 5 = \angle 7 = 150°$.

277. **1)** $\angle A = \angle L = 30°$, $\angle B = \angle M = 105°$,
$\angle C = \angle N = 180° - (30° + 105°) = 45°$.
2) Iš stačiojo $\triangle ABD$ randame $AB = 4$.
3) Iš stačiojo lygiašonio $\triangle BDC$: $DC = BD = 2$, randame $BC = 2\sqrt{2}$.
4) Iš stačiojo $\triangle ABD$: $AD = 2\sqrt{3}$, $DC = 2$, tai $AC = 2\sqrt{3} + 2$.
5) $k = \frac{BC}{MN} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.
6) $LM = \frac{AB}{k} = \frac{4}{2} = 2$, $LN = \frac{AC}{k} = \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = \sqrt{3} + 1$.
7) $h = 1$, nes panašiųjų trikampių aukštinių santykis lygus panašumo koeficientui $BD : h = 2$.
8) $P_{\triangle ABC} = 6 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$, $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3} + 2$. Todėl
$P_{\triangle LMN} = P_{\triangle ABC} = 3 + 0{,}5\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0{,}5(\sqrt{3} + 1)$.

Pastaba
Sąlygoje įsivėlė klaida. Turėtų būti „aukštinės, nubrėžtos į kraštinę ***LN***, ilgis“.

278. **a)** **1)** $\triangle ACB \backsim \triangle MNC$, pagal du lygius kampus: $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, (kaip atitinkamieji kampai gauti dvi lygiagrečias tieses perkirtus trečiąja).
2) $\angle M = 50°$, $\angle N = 40°$, tai $\angle C = 180° - (40° + 50°) = 90°$. Trikampiai ABC ir MNC — statieji.
3) Panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių santykis lygus trikampių panašumo koeficientui:
$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC} = 3$; $k = 3$, santykis $\frac{NC}{BC}$ yra atvirkščias santykiui $\frac{BC}{NC} = 3$, todėl $\frac{NC}{BC} = \frac{1}{3}$.
Perimetrų ir plotų santykiui rasti pasinaudojame vadovėlio 142 p. pateiktomis lygybėmis.
$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle MNC}} = 3$; $\frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9}$.
4) $\frac{AB}{MN} = 3$; $MN = \frac{AB}{3}$; $MN = 4$.
AC ir BC ieškosime pasinaudodami tuo, kad trikampis ABC yra statusis ir žinomi jo kampai.
$\sin\angle B = \frac{AC}{AB}$, $AC = AB \cdot \sin\angle B$, $AC = 12 \cdot \sin 40°$,
$\sin\angle A = \frac{BC}{AB}$, $BC = AB \cdot \sin\angle A$, $BC = 12 \cdot \sin 50°$.
$S_{\triangle ABC} = \frac{12 \cdot \sin 40° \cdot 12 \cdot \sin 50°}{2} \approx 35{,}45$.
$\frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9}$, tai $S_{\triangle CMN} = \frac{S_{\triangle ABC}}{9} \approx 3{,}94$.
b) $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BMN}} = 4$, tai $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle BMN}$, $S_{AMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BMN} = 3S_{\triangle BMN}$; $\frac{S_{AMNC}}{S_{\triangle BMN}} = 3$.

Atsakymai. **a)** **2)** $\angle M = 50°$, $\angle N = 40°$, $\angle C = 90°$; **3)** $\frac{AC}{MC} = 3$, $\frac{NC}{BC} = \frac{1}{3}$, $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle MNC}} = 3$, $\frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9}$; **4)** $MN = 4$, $AC = 12 \cdot \sin 40° \approx 7{,}7$ cm, $BC = 12 \cdot \sin 50° \approx 9{,}2$ cm, $S_{\triangle ABC} \approx 35{,}45$ cm^2, $S_{\triangle CMN} \approx 3{,}94$ cm^2;
b) 1 : 3.

279. $\triangle ABD \sim \triangle EAC$, tai
$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EC}$, $\frac{2}{3{,}6} = \frac{BD}{3{,}8}$, $BD = \frac{2 \cdot 3{,}8}{3{,}6} = 2\frac{1}{9}$.
Atsakymas. $BD = 2\frac{1}{9}$.

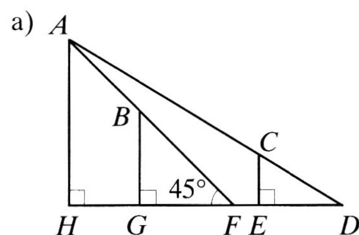
280. Panagrinėkime brėžinį a).

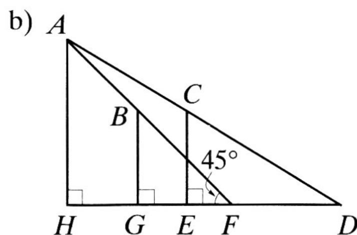
1) $\triangle ADH \sim \triangle CDE$, $\triangle AFH \sim \triangle BFG$ (nes kampai lygūs);

2) $\frac{AH}{HD} = \frac{CE}{ED}$, $ED = \frac{HD \cdot CE}{AH} = \frac{430 \cdot 150}{250} = 258$ (cm);

3) $\triangle BGF$ — status lygiašonis: $BG^2 + GF^2 = BF^2$, $2BG^2 = BF^2$;
$BG = \frac{BF \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{255 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx 180$ (cm);

4) $\triangle AHF$ — status lygiašonis, $HF = 250$ cm, $HG = 250 - 180 = 70$ (cm);
$GE = HD - HG - ED = 430 - 70 - 258 = 102$ (cm).





Pastaba

Išsprendę uždavinį matome, kad taškas F yra toliau (į dešinę) už tašką E. Tačiau, tai nepakeičia nei uždavinio esmės, nei sprendimo būdo. Galime nusibraižyti ir brėžinį, atitinkantį šią situaciją (žr. brėžinį b)).

6. LAIPSNINĖ FUNKCIJA

6.1. Funkcija $f(x) = x^n$

Išnagrinėję skyrelio medžiagą mokiniai turėtų:

- *mokėti* nurodyti funkcijos $f(x) = x^n$ apibrėžimo ir reikšmių sritį, lyginumą ir grafiko simetriškumą, didėjimo ir mažėjimo intervalus, visoms lyginio laipsnio funkcijoms bendrus taškus, visoms nelyginio laipsnio funkcijoms bendrus taškus;
- *suvokti* simbolių $f(1)$, $f(-x)$ ir pan. prasmę;
- *apskaičiuoti* laipsninės funkcijos reikšmes mintinai ir skaičiuokliu.

Mokiniams reikia priminti pagrindines laipsnių savybes: kai $m > n$, tai $a_1^m > a_1^n$, jei $a_1 > 1$ ir $a_1^m < a_1^n$, jei $0 < a < 1$ ir mokyti tuo pasinaudoti nustatant, kurios funkcijos grafikas koordinačių plokštumoje išsidėstęs aukščiau, kurios žemiau.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 288, 289, 291, 292.
Vidutinis lygmuo: 290.

288. a) 2; **b)** 0; **c)** $2 + 3\sqrt{3}$; **d)** $-0{,}46$; **e)** $\frac{1}{3}$.

289. Funkcijos $g(x) = x^5$, kai $x \in R$, o funkcijos $f(x) = x^4$, kai $x \in (0; +\infty)$, reikšmės didėja, kai didėja x reikšmės. Todėl, kai $x_1 > x_2$, tai ir funkcijų reikšmės $f(x_1) > f(x_2)$, $g(x_1) > g(x_2)$. Intervale $(-\infty; 0)$ funkcija $f(x) = x^4$ yra mažėjanti. Todėl, kai $x_1 > x_2$, funkcijos reikšmės $f(x_1) < f(x_2)$.
c) Kai $x < 0$, funkcija mažėjanti; $-1{,}1 > -1{,}2$, tai $f(-1{,}1) < f(-1{,}2)$.
e) Funkcija lyginė ($f(-x) = f(x)$), todėl $(-3{,}3)^2 = 3{,}3^2$.
g) Pasinaudojame tuo, kad $a^5 > a^4$, kai $a > 1$, $f(2{,}3) < g(2{,}3)$, nes $2{,}3^4 < 2{,}3^5$.

Atsakymai. **a)** $f(2{,}3) < f(2{,}4)$; **b)** $g(3{,}5) < g(3{,}7)$; **c)** $f(-1{,}1) < f(-1{,}2)$; **d)** $g(-0{,}12) < g(-0{,}1)$; **e)** $f(-3{,}3) = f(3{,}3)$; **f)** $g(-3{,}3) < g(3{,}3)$; **g)** $f(2{,}3) < g(2{,}3)$; **h)** $f(-2{,}3) > g(-2{,}3)$.

290. a) Vienintelė iš duotųjų funkcijų nelyginė yra funkcija $g(x) = x^{13}$, jos reikšmės gali būti neigiamos, o grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu, todėl (2) grafikas atitinka $g(x)$.
Akivaizdu, kad $x^{14} > x^{12}$, kai $|x| > 1$, pvz., $2^{14} > 2^{12}$. Vadinasi, $h(x) = x^{14}$ grafikas yra aukščiau už $f(x) = x^{12}$ grafiką intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$. Todėl $f(x)$ grafikas yra (3).

Atsakymai. **a)** (1) — $h(x)$, (2) — $g(x)$, (3) — $f(x)$,
b) (1) — $h(x)$, (2) — $g(x)$, (3) — $f(x)$.

291. a) $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$; **b)** $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$; **c)** $(0; 0)$, $(1; 1)$.

Pastaba
Pravartu pasinaudoti 290 uždavinio brėžiniu.

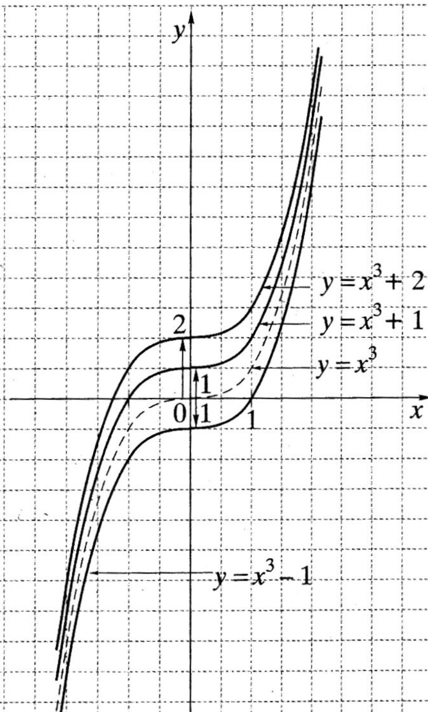
292. a)

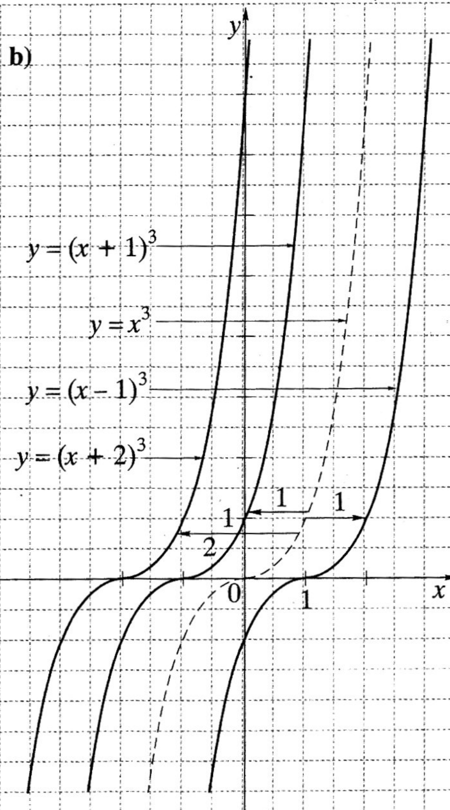
x	-2	-1	0	1	2
x^5	-32	-1	0	1	32
$x^5 + 1$	-31	0	1	2	33
$2x^5$	-64	-2	0	2	64
$2x^5 + 1$	-63	-1	1	3	65

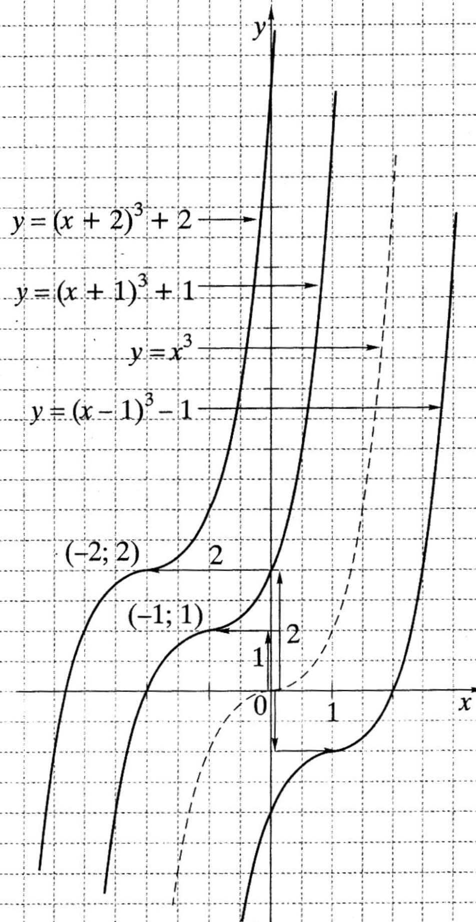
b)

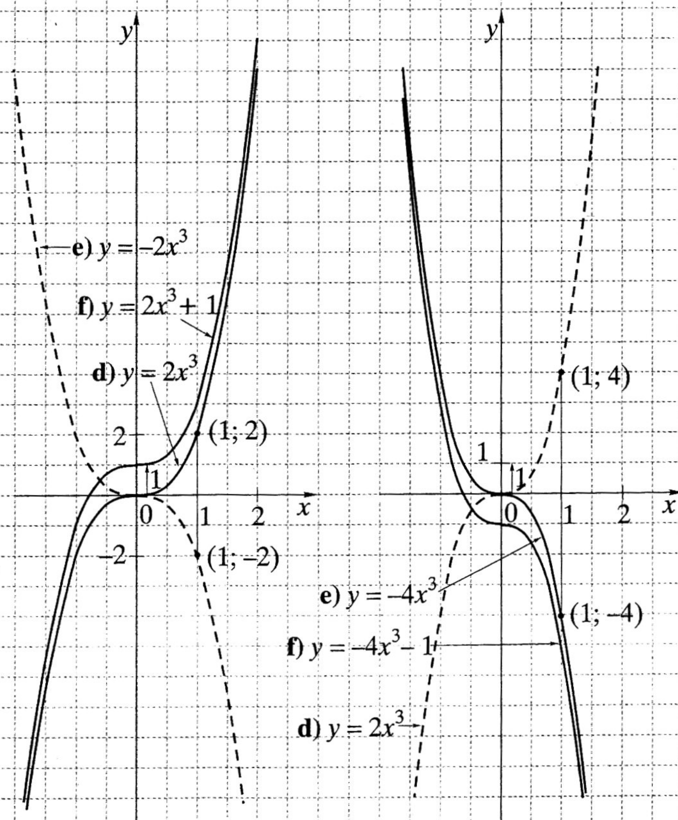
x	-3	-1	0	1	3
x^6	729	1	0	1	729
$x^6 - 2$	727	-1	-2	-1	727
$3x^6$	2187	3	0	3	2187
$3x^6 + 1$	2188	4	1	4	2188

293. Sprendžiant šį uždavinį, būtina atsižvelgti į pavyzdžius, pateiktus vadovėlyje. Labai patogu brėžinius brėžti kompiuteriu, turint tinkamas programas.
a), b) ir **c)** grafikus gausime funkcijos $f(x) = x^3$ grafiką stumdami lygiagrečiai x arba y ašims, kaip patariama vadovėlyje.
Atveju **d)** funkcijos $y = 2x^3$ reikšmės yra gaunamos funkcijos $y = x^3$ reikšmes dauginant iš 2. Atveju **e)** funkcijų grafikai yra gaunami apverčiant **d)** grafikus per x ašį, t. y. $y = 2x^3$ ir $y = -2x^3$ atitinkamos reikšmės yra vienas kitam priešingi skaičiai. Atveju **f)** grafikus gauname pastūmę **e)** grafikus lygiagrečiai y ašiai.


a)
y
x
$y = x^3 + 2$
$y = x^3 + 1$
$y = x^3$
$y = x^3 - 1$
2
1
0
1
1


b)
y
x
$y = (x + 1)^3$
$y = x^3$
$y = (x - 1)^3$
$y = (x + 2)^3$
1
1
1
2
0
1


c)
y
x
$y = (x + 2)^3 + 2$
$y = (x + 1)^3 + 1$
$y = x^3$
$y = (x - 1)^3 - 1$
(–2; 2)
2
(–1; 1)
1
2
0
1


y
x
e) $y = -2x^3$
f) $y = 2x^3 + 1$
d) $y = 2x^3$
(1; 2)
(1; –2)
2
–2
1
0
1
2
y
x
(1; 4)
1
1
0
1
2
e) $y = -4x^3$
(1; –4)
f) $y = -4x^3 - 1$
d) $y = 2x^3$

6.2. Lygtis $ax^n = b$

Skyrelyje paprastais pavyzdžiais paaiškinta, kaip sprendžiamos $ax^n = b$ pavidalo lygtys. Su mokiniais reiktų išspręsti ir lygtį, kurios sprendinių negalime mintinai rasti, pavyzdžiui, $x^5 = 7$. *Tikslūs* tokios lygties sprendiniai užrašomi su šaknimi ($x = \sqrt[5]{7}$), o *apytiksles* sprendinių reikšmes galime rasti skaičiuokliu, turinčiu funkcijos reikšmių skaičiavimo galimybę.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 294.
Vidutinis lygmuo: 295, 296.
Aukštesnysis lygmuo: 297.

294. **a)** 1, -1, 0; **b)** ± 1, $\varnothing$, 0; **c)** $\sqrt[3]{4}$, $-\sqrt[3]{4}$, 0; **d)** $\pm\sqrt[8]{2}$, $\sqrt[9]{2}$, $\varnothing$, $-\sqrt[9]{2}$.

295. **a)** Skaičių 8 gausime 2 pakėlę trečiuoju laipsniu: $(2x + 4)^3 = 2^3$. Vadinasi, lygties sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis $2x + 4 = 2$, t. y. $x = -1$.
b) $(3x - 5)^3 = -1^3$, $3x - 5 = -1$, $x = \frac{4}{3}$.
c) Yra du skaičiai, kuriuos pakėlę kvadratu gausime 36, tai -6 ir $+6$. Lygties sprendinius randame iš lygčių:

$$x^2 - x = -6, \qquad x^2 - x = 6,$$

$$x^2 - x + 6 = 0, \qquad x^2 - x - 6 = 0,$$

$$D = 1 - 24 < 0, \qquad D = 1 + 24 = 25,$$

$$\varnothing. \qquad x_1 = \frac{1-5}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

d) Ši lygtis sprendinių neturi, nes keldami lyginiu laipsniu gauname neneigiamą skaičių.

Atsakymai. **a)** -1; **b)** $1\frac{1}{3}$; **c)** -2; 3; **d)** $\varnothing$.

296. **b)** Stačiojo trikampio antrąjį statinį a randame iš lygybės $\operatorname{tg} 30° = \frac{x^2}{a}$:
$a = \frac{x^2}{\operatorname{tg} 30°} = x^2 : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}x^2$.
Plotas $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}x^2 \cdot x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x^4$. Apskaičiuojame x:
$\frac{\sqrt{3}}{2}x^4 = \sqrt{3}$, $x^4 = 2$, $x_1 = \sqrt[4]{2}$, $x_2 = -\sqrt[4]{2}$.

Atsakymai. **a)** -2, 2; **b)** $\pm\sqrt[4]{2}$; **c)** 2; **d)** 1.

297. **1)** Lygties sprendiniai yra funkcijų $y = x^n$ ir $y = \frac{b}{a}$ grafikų susikirtimo taškų abscisės.
a) ± 1; **b)** $\varnothing$; **c)** 2.
2) Jei $b = 4$, tai mokinys brėžė tiesę $y = \frac{4}{a}$: **a)** atveju $\frac{4}{a} = 1$, tai $a = 4$; **b)** atveju $\frac{4}{a} = -1$, $a = -4$; **c)** atveju $\frac{4}{a} = 8$, $a = 0{,}5$.
Mokinys sprendė lygtis:
a) $4x^n = 4$; **b)** $-4x^n = 4$; **c)** $0{,}5x^n = 4$.
Jei $a = 4$, tai mokinys brėžė tiesę $y = \frac{b}{4}$, taigi:
a) atveju $\frac{b}{4} = 1$, $b = 4$; **b)** atveju $\frac{b}{4} = -1$, $b = -4$; **c)** atveju $\frac{b}{4} = 8$, $b = 32$.
Mokinys sprendė lygtis:
a) $4x^n = 4$; **b)** $4x^n = -4$; **c)** $4x^n = 32$.
3) Tiesė $y = \frac{b}{a}$ nekerta funkcijos $y = x^{2n}$ grafiko, kai $\frac{b}{a} < 0$, todėl lygtis $ax^{2n} = b$ neturi sprendinių; kai tiesė sutampa su x ašimi $\frac{a}{b} = 0$ — vienas sprendinys, kai $\frac{b}{a} > 0$, lygtis turi du sprendinius.
4) Tiesė $y = \frac{b}{a}$ visuomet kirs funkcijos $y = x^{2n+1}$ grafiką ir lygtis $ax^{2n+1} = b$ turės vienintelį sprendinį.

Pastaba
Grafikų žymėjimas a), b) ir c) bei reikšmių pasirinkimas 2) punkte (a ir b) nėra susiję. Geriau grafikus sunumeruoti I, II, III ar kaip kitaip.

Nagrinėdami šį skyrelį mokiniai turėtų:

- *žinoti* skirtumą tarp lyginio laipsnio šaknies ir nelyginio laipsnio šaknies apibrėžimo sričių;
- *išmokti* taikyti laipsninių funkcijų savybes funkcijos reikšmių palyginimui, grafikų atpažinimui (užd. 300, 301, 303, 305).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 298, 299.
Vidutinis lygmuo: 300, 301a, 302, 305.
Aukštesnysis lygmuo: 301b, 303, 304.

298. **a)** 1; **b)** 3; **c)** 0; **d)** $-1,1$; **e)** 1.

299. Atvejais a)–c) patarkite mokiniams pasinaudoti tuo, kad abi funkcijos yra didėjančios visoje savo apibrėžimo srityje, todėl, kai argumento reikšmė didesnė, tai ir funkcijos reikšmė didesnė ir atvirkščiai.

Atsakymai. **a)** $f(2,3) < f(2,4)$; **b)** $g(3,5) < g(3,7)$; **c)** $f(0,1) > f(0)$; **d)** palyginti negalima, nes lyginio laipsnio šaknis iš neigiamų skaičių neturi prasmės; **e)** $f(2,3) > g(2,3)$, nes $\sqrt[4]{2,3} \approx 1,231$, o $\sqrt[5]{2,3} \approx 1,181$; **f)** $f(10) > g(10)$.

Pastaba
Atveju d) galima lyginti tik funkcijos reikšmes $g(-0,1)$ ir $g(-0,2)$. Matyt, taip ir turėjo būti parašyta. Tada, $\sqrt[5]{-0,1} > \sqrt[5]{-0,2}$.

300. **a)** (1) — $f(x)$; (2) — $g(x)$; **b)** (1) — $f(x)$; (2) — $g(x)$.

301. **a)** Reikia nepamiršti, kad funkcijų grafikai duoti intervale [0; 1]. Norėdami palyginti funkcijų reikšmes, pavyzdžiui taške $x = \frac{1}{2}$, palyginame $\sqrt[10]{\frac{1}{2}}$ ir $\sqrt[19]{\frac{1}{2}}$ kaip laipsnius $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{10}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{19}}$, nes $\frac{1}{10} > \frac{1}{19}$ (taikome laipsnių savybę $a^m < a^n$, kai $m > n$ ir $0 < a < 1$). Didesnės yra funkcijos $g(x)$ reikšmės, taigi $g(x)$ grafikas (1), o $f(x)$ — (2).

b) Tik nelyginio laipsnio šaknis iš neigiamų skaičių turi prasmę, todėl į III ketvirtį (kai $x < 0$ ir $y < 0$) galima pratęsti tik funkcijos $g(x) = \sqrt[19]{x}$ grafiką. Teisingas atsakymas **C**.

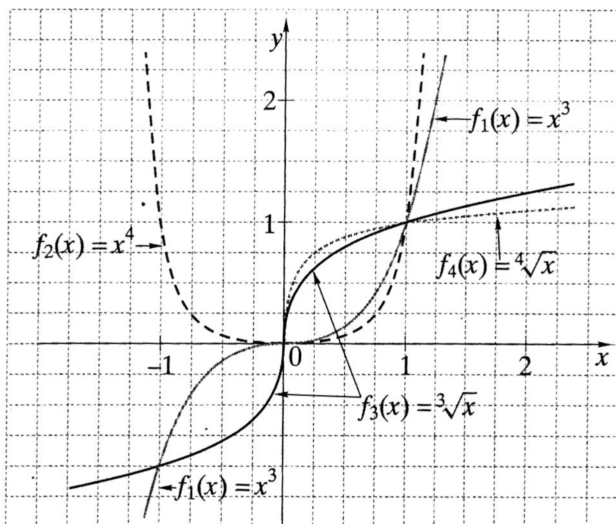
c) **1)** $g(x) > f(x)$; **2)** $f(x) > g(x)$ (pavyzdžiui, kai $x = 2$, turime $2^{\frac{1}{10}} > 2^{\frac{1}{19}}$, nes kai pagrindas $a > 1$, tai $a^m > a^n$, jei $m > n$).

302. Galima paaiškinti taip:

- Lyginio laipsnio šaknys, kai $x < 0$, neegzistuoja, tai (3) ir (4) gali būti tik funkcijų $g(x) = \sqrt[12]{x}$ arba $l(x) = \sqrt[12]{x} - 2$ grafikai.
- Patikriname, kuris grafikas eina per koordinačių pradžios tašką (0; 0): kai $x = 0$, $g(0) = \sqrt[12]{0} = 0$, $l(0) = \sqrt[12]{0} - 2 = -2$, todėl (3) — $g(x)$, (4) — $l(x)$.
- Nelyginio laipsnio šaknys turi prasmę ir kai $x < 0$, tai (1) ir (2) grafikai yra funkcijų $f(x) = \sqrt[7]{x}$ arba $h(x) = \sqrt[7]{x} + 2$.
- Patikriname, kurios funkcijos grafikas eina per tašką (0; 0). Kai $x = 0$, $f(0) = 0$, $h(0) = 2$, todėl (1) — $f(x)$, (2) — $h(x)$.

Atsakymas. **C**.

303. **a)** $f_4(x)$ — (1), $f_3(x)$ — (2), $f_1(x)$ — (3), $f_2(x)$ — (4);
b)

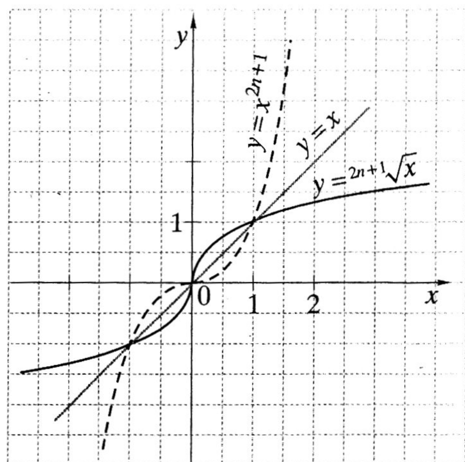


304. **1)** Grafikų simetrijos ašis — tiesė $y = x$ yra I ir III koordinatinių kampų pusiaukampinė, tai, brėžinį perlenkus per ją, x ir y ašys sutaps ir taškas A sutaps su jam simetrišku tašku B funkcijos $y = \sqrt{x}$ grafike. Taško A ordinatė $y = b$ bus taško B abscisė $x = b$, o taško a abscisė $x = 1{,}5$, bus taško B ordinatė $y = 1{,}5$. Teisingas atsakymas **B**.

2) Jei taškas $A(1{,}5; b)$ priklauso funkcijos $f(x) = x^2$ grafikui, tai $b = f(1{,}5) = 2{,}25$. Koordinatės yra $A(1{,}5; 2{,}25)$, $B(2{,}25; 1{,}5)$.

3) Kadangi A ir B yra simetriški tiesės atžvilgiu, tai jie yra ant statmens išvesto per tašką A tiesei $y = x$. Kur statmuo kerta $y = \sqrt{x}$ grafiką, ten yra taškas B.

4) Funkcijų $f(x) = x^{2n+1}$ ir $g(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ grafikai taip pat simetriški $y = x$ atžvilgiu.



305. **1)** **a)** $x = 16$; **b)** $x = -8$.

2) Mokinys sprendė lygtį: **a)** $\sqrt[4]{x} = 2$; **b)** $\sqrt[3]{x} = -2$.

3) Taip. Kai $a < 0$, tiesė $x = a$ nekerta funkcijos $f(x) = \sqrt[2n]{x}$ grafiko, nes funkcijos reikšmės neneigiamos, lygtis $\sqrt[2n]{x} = a$ sprendinių neturi.

4) Ne. Tiesė $y = a$ visada kerta funkcijos $g(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ grafiką, nes funkcija įgyja reikšmes nuo $-\infty$ iki $+\infty$. Lygtis $\sqrt[2n+1]{x} = a$ turi vienintelį sprendinį.

6.4. Iracionaliosios lygtys

Skyrelio tikslas — išmokyti mokinius spręsti paprastas iracionaliąsias lygtis, kai nežinomasis yra kvadratinės arba kubinės šaknies pašaknyje.
Mokiniai turėtų:

- *prisiminti*, kad funkcija $f(x) = \sqrt[2n]{x}$, kai $x \geqslant 0$, įgyja tik neneigiamas reikšmes, o $\sqrt[2n+1]{x}$ gali įgyti tiek teigiamas, tiek neteigiamas reikšmes, kai $x \in R$;
- *žinoti*, kad, abi iracionaliosios lygties puses pakėlus lyginiu laipsniu, gali atsirasti pašalinių sprendinių, todėl sprendinius būtina tikrinti, įstačius gautas nežinomojo reikšmes į *pradinę* lygtį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 306, 307a,b, 308.
Vidutinis lygmuo: 307d), 309, 310, 311a,b.
Aukštesnysis lygmuo: 307c, 309e, 311c.

306. **a)** 1, ∅, 0; **b)** 1, −1, 0; **c)** 1, ∅, 0; **d)** 1, −1, 0.

307. **b)**

$\sqrt{5x-3} = 3 \mid \uparrow^2$	$\sqrt{5x-3} = -3$	$\sqrt{5x-3} = 0$
$5x - 3 = 9$	Lyginio laipsnio šaknis negali	Jei šaknis lygi nuliui, tai
$x = \frac{12}{5}$	būti neigiamas skaičius.	pošaknis irgi lygus nuliui.
$x = 2{,}4$	Sprendinių nėra.	$5x - 3 = 0$, $x = 0{,}6$

Patikrinimas. Kai $x = 2{,}4$, $\sqrt{5 \cdot 2{,}4 - 3} = \sqrt{12 - 3} = 3$, kai $x = 0{,}6$.

c) $\sqrt{x^2 - 2x + 26} = 8 \mid \uparrow^2$
$x^2 - 2x + 26 = 64$, $x^2 - 2x - 38 = 0$, $D = 2\sqrt{39}$;
$x_1 = \frac{2-2\sqrt{39}}{2} = 1 - \sqrt{39}$, $x_2 = 1 + \sqrt{39}$.
Patikrinimas. Kai $x = 1 - \sqrt{39}$,
$\sqrt{1 - 2\sqrt{39} + 39 - 2 + 2\sqrt{39} + 26} - 3 = 5$, $\sqrt{64} - 3 = 5$, $5 = 5$.
Kai $x = 1 + \sqrt{39}$.
$\sqrt{1 + 2\sqrt{39} + 39 - 2 - 2\sqrt{39} + 26} - 3 = 5$, $\sqrt{64} - 3 = 5$, $5 = 5$.

Pastaba.
c) atvejo trečioji lygtis turi būti tokia: $\sqrt{x^2 - 2x + 26} - 3 = 5$.

Atsakymai. **a)** 3, ∅, −1; **b)** 2,4, ∅, 0,6; **c)** $\pm\sqrt{26}$, $1 \pm \sqrt{26}$, $1 \pm \sqrt{39}$; **d)** 5, ∅, ∅.

308. **a)** 7, −9, −1; **b)** 6, 31, ±1.

309. **e)** $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{3x^2 - 2} \,\Big|\, \uparrow^2$
$x^2 - 2x = 3x^2 - 2$, $-2x^2 - 2x + 2 = 0 \mid : (-2)$,
$x^2 + x - 1 = 0$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Patikrinimas.
Kai $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,

$$\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{3\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2},$$

$$\sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} + 1 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3(1+2\sqrt{5}+5)}{4} - 2},$$

$$\sqrt{\frac{10+6\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{10+6\sqrt{5}}{4}}.$$

Kai $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

$$\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{3\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2},$$

$$\sqrt{\frac{10-6\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{10-6\sqrt{5}}{4}}.$$

Pošakniai lygūs, tačiau abu neigiami ($10 < 6\sqrt{5}$), tai x_2 nėra šios lygties sprendinys.

Atsakymai. **a)** ∅; **b)** 2; **c)** 2; **d)** 1; **e)** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; **f)** $\pm\sqrt{3}$; **g)** ∅.

310. **a)** −4; **b)** 1; **c)** ∅; **d)** 1.

311. **c)** Keliame abi puses kvadratu ir sprendžiame.

$2\sqrt{3x^2-4}=2x+5 \mid \uparrow^2$

$4(3x^2-4)=4x^2+20x+25, \quad 8x^2-20x-41=0;$

$D=400+32\cdot 41=4^2\cdot 107;$

$x_1=\dfrac{5-\sqrt{107}}{4}, \quad x_2=\dfrac{5+\sqrt{107}}{4}.$

Patikrinimas. Kai $x=x_1$,

$$2\cdot\sqrt{3\Big(\frac{5-\sqrt{107}}{4}\Big)^2-4}=\frac{2(5-\sqrt{107})}{4}+5,$$

$$2\cdot\sqrt{\frac{3(25-10\sqrt{107}+107)}{16}-4}=\frac{5-\sqrt{107}+10}{2},$$

$$\frac{2\sqrt{75-30\sqrt{107}+321-64}}{\sqrt{16}}=\frac{15-\sqrt{107}}{2},$$

$$\frac{\sqrt{332-30\sqrt{107}}}{2}=\frac{15-\sqrt{107}}{2}.$$

$(15-\sqrt{107})^2=225-30\sqrt{107}+107=332-30\sqrt{107}$, be to $15-\sqrt{107}>0$.

Todėl

$$\frac{\sqrt{(15-\sqrt{107})^2}}{2}=\frac{15-\sqrt{107}}{2}.$$

Kai $x=x_2$,

$$2\cdot\sqrt{3\Big(\frac{5+\sqrt{107}}{4}\Big)^2-4}=\frac{2(5+\sqrt{107})}{4}+5,$$

$$2\cdot\sqrt{\frac{3(25+10\sqrt{107}+107)}{16}-4}=\frac{5+\sqrt{107}+10}{2},$$

$$\frac{\sqrt{(15+\sqrt{107})^2}}{2}=\frac{15+\sqrt{107}}{2}.$$

Atsakymai. **a)** 2; **b)** $\varnothing$; **c)** $\frac{5-\sqrt{107}}{2}$, $\frac{5+\sqrt{107}}{2}$.

Pastaba

Užduotis c) spręstina tik su labiau matematika besidominčiais mokiniais.

6.5. Geometrijos uždaviniai

Mokiniai turėtų:

- *žinoti*, kas yra kubo ir stačiakampio gretasienio briauna, siena, sienos įstrižainė, kubo ir stačiakampio gretasienio įstrižainė;
- *mokėti* apskaičiuoti kubo ir stačiakampio gretasienio tūrį, paviršiaus plotą, įstrižainių ilgius;
- *suvokti*, kaip kinta kubo ar stačiakampio gretasienio tūris kelis kartus pakitus kraštinių ilgiams.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 312, 313.
Vidutinis lygmuo: 315, 316.
Aukštesnysis lygmuo: 314.

312.

a) ir **b)**	Briaunų suma	Sienos plotas	Viso paviršiaus plotas	Tūris
Kubo briauna a	$12a$	a^2	$6a^2$	a^3
Kubo briauna 2 cm	24 cm	$4\,\text{cm}^2$	$24\,\text{cm}^2$	$8\,\text{cm}^3$
Stačiakampio briaunos lygios a, b, c	$4(a+b+c)$	ab, bc, ac	$2(ab+bc+ac)$	$a\cdot b\cdot c$
Stačiakampio briaunos 2 cm, 2,5 cm, 3 cm	$4(2+2{,}5+3)=30\,\text{cm}$	$5\,\text{cm}^2$, $7{,}5\,\text{cm}^2$, $6\,\text{cm}^2$	$2(5+7{,}5+6)=37\,\text{cm}^2$	$15\,\text{cm}^3$

c) 1) $V_{\text{kūno}} = V_{\text{gretasienio}} - V_{\text{kubo}} = 15 - 8 = 7\,\text{cm}^3$;
2) $S = S_{\text{gretasienio}} - 2a^2 + S_{\text{kubo šoninis}} = 2(ab+bc+ac) + 2a^2 = 37 + 8 = 45\,\text{cm}^2$;
3) Dažų reikės 90 g.

Pastaba
Stačiakampio gretasienio įstrižainei apskaičiuoti galima pasinaudoti formule $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, o kubo $d^2 = 3a^2$.

313. a) 1) 5 cm; **2)** $125\,\text{cm}^3$; **3)** $5\sqrt{2}$ cm; **4)** $5\sqrt{3}$ cm.
b) 1) $\sqrt{5}$ cm; **2)** $5\sqrt{5}\,\text{cm}^3$; **3)** $\sqrt{10}$ cm; **4)** $\sqrt{15}$ cm.

314. a) m lygi trims kubelio viršutinės sienos įstrižainėms $3a\sqrt{2}$; kai $a = 1$ cm, $m = 3\sqrt{2}$ cm;
b) m lygi trim kubelio įstrižainėms $3a\sqrt{3}$; kai $a = 1$ cm, $m = 3\sqrt{3}$ cm.

315. Pasižymime pagrindo plotį $a = 40\,\text{cm} = 4\,\text{dm} = 0{,}4\,\text{m}$, ilgį $b = 1\,\text{m} = 10\,\text{dm}$, o aukštį c.
1) Tada $V = a\cdot b\cdot c$, $V = 0{,}4\cdot 1\cdot c = 0{,}2\,\text{m}^3$, $c = \frac{0{,}2}{0{,}4} = \frac{1}{2}$ (m) $= 50$ cm.
2) $V = 150\,\ell = 150\,\text{dm}^3$, $4\cdot 10\cdot c = 150$, $c = \frac{150}{40} = 3{,}75\,\text{dm} = 37{,}5\,\text{cm}$.
Atsakymas. Akvariumo aukštis 50 cm; vandens aukštis 37,5 cm.

316. a) Kubų briaunas pasižymime a ir $2a$.

$$\frac{V_{\text{naujojo}}}{V_{\text{pradinio}}} = \frac{(2a)^3}{a^3} = 2^3 = 8.$$

b) Pasižymime gretasienių briaunas a, b, c ir $2a$, $2b$, $2c$, atitinkamai.

$$\frac{V_{\text{naujojo}}}{V_{\text{pradinio}}} = \frac{2a\cdot 2b\cdot 2c}{a\cdot b\cdot c} = 8.$$

Atsakymai. **a)** 8, 27, 64, n^3; **b)** 8, n^3.

7. RODIKLINĖ FUNKCIJA

7.1. Funkcija $f(x) = a^x$

Mokiniai gali savarankiškai nagrinėti funkcijų 2^x, 3^x, $(\frac{1}{2})^x$ ir $(\frac{1}{3})^x$ savybes ir spręsti 324 ir 327 užduotis (vienoje koordinačių sistemoje nusibraižę funkcijų grafikus). Šių užduočių c), d) ir e) punktų atsakymai pravers sprendžiant kitus skyrelio uždavinius.

Išnagrinėję skyrelio medžiagą mokiniai turėtų:

- *žinoti* rodiklinės funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis, kurios rodiklinės funkcijos yra didėjančiosios, kurios mažėjančiosios, kad taškas (0; 1) yra bendras visoms rodiklinėms funkcijoms;
- *mokėti* nubraižyti rodiklinės funkcijos grafiko eskizą;
- *gebėti* apskaičiuoti rodiklinės funkcijos reikšmes mintinai ir skaičiuokliu;
- *taikyti* rodiklinės funkcijos savybes paprasčiausioms užduotims spręsti.

Norėdami sėkmingai spręsti pateiktas užduotis, mokiniai turi prisiminti kėlimo laipsniu taisykles ir faktą, kad, jei $a < b$, tai $a^m < b^m$, kai $m > 0$, ir $a^m > b^m$, kai $m < 0$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 324, 326.1,3, 327, 329.1,3.
Vidutinis lygmuo: 325, 326 2), 328, 329 2), 330.
Aukštesnysis lygmuo: 331.

324. Rodiklinės funkcijos reikšmes galime rasti skaičiuokliu. Pavyzdžiui, $f(x) = 2^x$, kai $x = -\frac{1}{2}$, reikšmę $f(-\frac{1}{2}) = 2^{-1/2} \approx 0{,}717$ rasime tokia tvarka:

laipsnio pagrindas	kėlimo laipsniu funkcija	laipsnio rodiklis	ženklo keitimas	atsakymas	
2	x^y	0,5	+/–	=	0,717106781

Atsakymai. **2) a)** $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}}$, $2^{3\frac{1}{2}} < 3^{3\frac{1}{2}}$; **b)** $2^{-\frac{1}{2}} > 3^{-\frac{1}{2}}$, $2^{-3\frac{1}{2}} > 3^{-3\frac{1}{2}}$;
c) $2^x < 3^x$, kai $x \in (0; +\infty)$; **d)** $2^x > 3^x$, kai $x \in (-\infty; 0)$;
e) $2^x = 3^x$, kai $x = 0$.
3) Kadangi funkcijos 2^x ir 3^x yra didėjančiosios, tai jų reikšmės išsidėstys rodiklių didėjimo tvarka.
a) $2^{-8}, 2^{-3}, 2^{-\frac{1}{2}}, 2^0, 2^{3\frac{1}{2}}, 2^5, 2^8, 2^{15}$;
b) $3^{-15}, 3^{-14}, 3^{-\frac{1}{2}}, 3^{-\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{2}}, 3^9, 3^{10}$.
4) a)
$f(-4) = 2^{-4} = \frac{1}{16} \approx 0{,}1$,
$f(5) = 2^5 = 32$,
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$,
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$,
$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} \approx 2{,}8$;
b)
$g(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81} \approx 0$,
$g(5) = 3^5 = 243$,
$g\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1{,}7$,
$\left(-\frac{1}{2}\right) = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}6$,
$g\left(\frac{5}{2}\right) = 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5} = \sqrt{243} \approx 15{,}6$;
c) $f(\sqrt{2}) = 2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1{,}414} \approx 2{,}7$, $g(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1{,}414} \approx 4{,}7$.

Patarkite mokiniams
pasinaudoti funkcijų grafikais, nubraižytais vadovėlio 172 p.

Pastaba
Iš tikrųjų, geriau būtų parašyti atsakymus šimtosios tikslumu, nes kitaip $g(-4) \approx 0$, kas mokiniams gali pasirodyti keista.

325. 1) Iš brėžinio matome, kad, kai $x \in (0; +\infty)$, aukščiau yra funkcijos $g(x) = b^x$ grafikas, t. y. funkcijos $g(x)$ reikšmės didesnės už funkcijos $f(x)$ reikšmes. Apskaičiuojame funkcijų reikšmes, kai $x = 1$, $y_a = f(1) = a^1 = a$, $y_b = g(1) = b^1 = b$, tai $b > a$.
2) Funkcijų reikšmės, kai $x = -1$: $f(-1) = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $g(-1) = b^{-1} = \frac{1}{b}$.
Atsakymai. **1)** $b > a$; **2)** nuo apačios: $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$, a, b.

326. 1) A;
2) a) $a > b$; **b)** $a^3 > b^3$, $a^4 > b^4$, $a^{100} > b^{100}$; **c)** $a^{-3} < b^{-3}$, $a^{-4} < b^{-4}$, $a^{-100} < b^{-100}$; **d)** $a^x > b^x$, kai $x \in (0; +\infty)$; **e)** $a^x < b^x$, kai $x \in (-\infty; 0)$;
f) $a^x = b^x$, kai $x = 0$;
3) a) $a^{-100}, a^{-99}, a^{-\frac{2}{3}}, a^{-\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{99}, a^{100}$;
b) $b^{-16}, b^{-15}, b^{-4}, b^{-\sqrt{5}}, b^{-\sqrt{3}}, b^0, b^{\sqrt{3}}, b^{\sqrt{5}}, b^{15}, b^{16}$.

327. **2)** **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{3\frac{1}{2}}$;
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3\frac{1}{2}}$;
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, kai $x \in (-\infty; 0)$;
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, kai $x \in (0; +\infty)$;
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, kai $x = 0$.
3) Kadangi funkcijos $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ ir $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ yra mažėjančiosios, tai jų reikšmės didėja, kai laipsnio rodikliai mažėja.
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}, \left(\frac{1}{2}\right)^{8}, \left(\frac{1}{2}\right)^{5}, \left(\frac{1}{2}\right)^{3\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{0}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$;
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{13}, \left(\frac{1}{3}\right)^{10}, \left(\frac{1}{3}\right)^{9}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-14}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-15}$.

Patarkite mokiniams pasinaudoti grafikų brėžiniais vadovėlio 173 p.

328. **1)** Kai $x = 1$, $f(1) = a^1 = a$, $g(1) = b^1 = b$. Iš brėžinio matome, kad aukščiau yra funkcijos $f(x) = a^x$ grafikui priklausantis taškas, tai $f(1) > g(1)$, t. y. $a > b$.
2) Kai $x = -1$, $f(-1) = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $g(-1) = b^{-1} = \frac{1}{b}$. Žemiau yra funkcijos $f(x) = a^x$ grafikui priklausantis taškas, tai $f(-1) < g(-1)$ ir $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
Atsakymai. **1)** $a > b$; **2)** nuo apačios: b, a, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$.

329. **1)** **B**;
2) **a)** $a > b$; **b)** $a^3 > b^3$, $a^4 > b^4$, $a^{100} > b^{100}$;
c) $a^{-3} < b^{-3}$, $a^{-4} < b^{-4}$, $a^{-100} < b^{-100}$;
d) $a^x < b^x$, kai $x \in (-\infty; 0)$;
e) $a^x > b^x$, kai $x \in (0; +\infty)$; **f)** $a^x = b^x$, kai $x = 0$;
3) **a)** $a^{100}, a^{99}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{-\frac{1}{3}}, a^{-\frac{2}{3}}, a^{-99}, a^{-100}$;
b) $b^{16}, b^{15}, b^{\sqrt{5}}, b^{\sqrt{3}}, b^{0}, b^{-\sqrt{3}}, b^{-\sqrt{5}}, b^{-4}, b^{-15}, b^{-16}$.

330. **2)** **a)** $f(-4) = 2^{-4} = \frac{1}{16}$, $g(-4) = \left(\frac{1}{2}\right) = 16$,
$f(4) = 2^4 = 16$, $g(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$,
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
b) $f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}$, $g(4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$,
$f(4) = 3^4 = 81$, $g(-4) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$,
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
3) $f(x) = g(-x)$, $f(-x) = g(x)$.
4) Kai argumentai yra vienas kitam priešingi skaičiai (x ir $-x$), tai funkcijų reikšmės lygios $f(x) = g(-x)$ ir $f(-x) = g(x)$. Taškai, kurių ordinatės (y) lygios, o abscisės (x) skiriasi tik ženklu, išsidėsto abipus y ašies (simetriškai y ašiai), tai funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai yra simetriški vienas kitam y ašies atžvilgiu.

Patarkite mokiniams pasinaudoti grafikais, nubraižytais vadovėlio 172, 173 p.

331. **a)** (1), (2) ir (3) funkcijos yra mažėjančiosios, tai $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$. Kai $x = -1$, iš brėžinio matome, kad $a^{-1} < b^{-1} < c^{-1}$, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$, tai $a > b > c$. (Iš trupmenų, kurių skaitikliai lygūs, mažiausia ta, kurios vardiklis didžiausias.)
(4), (5) ir (6) funkcijos yra didėjančiosios ir $d > 1$, $e > 1$, $f > 1$. Kai $x = 1$, iš brėžinio (vadovėlio 178 p.) matome, kad $d > e > f$.
Kadangi $a < 1$, o $f > 1$, tai funkcijų pagrindai išsidėstys tokia tvarka $c < b < < a < f < e < d$.
b) Kai $x = 1$: $a^1 > b^1 > c^1$, tai žemiausiaiyra funkcijos $y = c^x$ grafikas. Vietoje klaustukų įrašome (nuo žemiausio) (3), (2), (1).
Kai $x = -1$: $d^{-1} > e^{-1} > f^{-1}$, tai yra $\frac{1}{d} > \frac{1}{e} > \frac{1}{f}$. (Iš trupmenų, kurių skaitikliai lygūs, didžiausia yra trupmena, kurios vardiklis mažiausias.) Žemiausiai yra funkcijos $y = f^x$ grafikas. Vietoje klaustukų įrašome (nuo žemiausio): (6), (5), (4).

7.2. Rodiklinės lygtys

Mokiniai rodiklines lygtis sprendžia pasinaudodami tuo, kad laipsniai vienodais pagrindais ($a \neq 1$) yra lygūs tik tada, kai jų rodikliai yra lygūs. Jie turėtų mokėti paprastais atvejais pertvarkyti rodiklines lygtis į $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ pavidalo lygtis. Sudėtingesniais atvejais – pasinaudoti logaritmo apibrėžimu. Stipresniems mokiniams galima parodyti, kaip tam tikras rodiklines lygtis galima spręsti įvedant naują nežinomąjį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 332, 334, 335, 337a,b.
Vidutinis lygmuo: 333, 336, 337c,e,f.
Aukštesnysis lygmuo: 337d, 338.

Priminkite mokiniams, kad $(a^m)^n = a^{mn}$.

332. e)

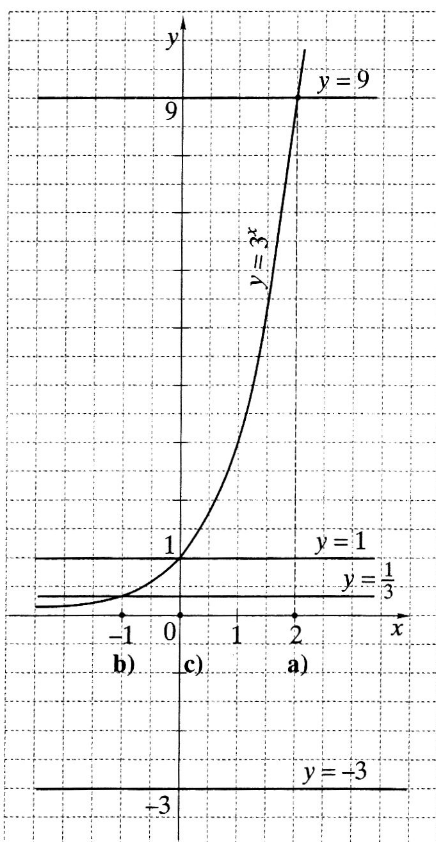
$4^x = 8,$	$9^x = \frac{1}{27},$	$25^{-x} = \frac{1}{125},$
$(2^2)^x = 2^3,$	$(3^2)^x = 3^{-3},$	$(5^2)^{-x} = 5^{-3},$
$2^{2x} = 2^3,$	$3^{2x} = 3^{-3},$	$5^{-2x} = 5^{-3},$
$2x = 3,$	$2x = -3,$	$-2x = -3,$
$x = \frac{3}{2}.$	$x = -\frac{3}{2}.$	$x = \frac{3}{2}.$

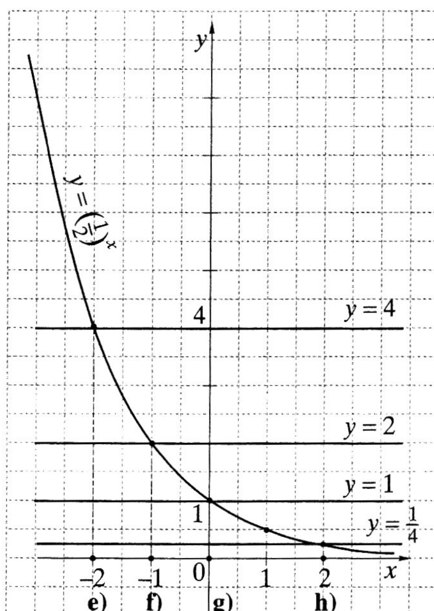
Atsakymai. **a)** $x = 7$, $x = 5$, $x = 8$, $x = \pm 2$;
b) $x = 0$, $x = 5$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 1$;
c) 7, -7, $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$, ± 1; **d)** -2, -3, -3, $-\frac{5}{2}$; **e)** $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$.

333. Lygties $a^x = b$ sprendinys yra grafikų $y = b$ ir $y = a^x$ susikirtimo taško abscisė (x reikšmė).

Atsakymai. **1) a)** $x = 2$; **b)** $x = 0$; **c)** $x = -1$; **d)** lygtis sprendinių neturi, nes grafikai nesikerta.
2) a) $2^x = 4$; **b)** $2^x = 1$; **c)** $2^x = \frac{1}{2}$; **d)** $3^x = -1$;
3) a) $2^x = 2^2$, $x = 2$; **b)** $2^x = 2^0$, $x = 0$; **c)** $2^x = 2^{-1}$, $x = -1$;
d) sprendinių nėra;
4) taip, jei $b < 0$.

334.





d) sprendinių nėra.

335. **a)** $x = \log_2 5$; **b)** $x = \log_2 7$; **c)** $x = \log_3 8$; **d)** $x = \log_5 10$; **e)** $x = \log_{\frac{1}{2}} 5$; **f)** $x = \log_{\frac{1}{7}} 2$.

336. **c)** $5^{x+1} = 2$, $5^{x+1} = 5^{\log_5 2}$, $x + 1 = \log_5 2$, $x = \log_5 2 - 1$.

Atsakymai. **a)** $x = \log_2 7$; **b)** $\log_3 10$; **c)** $5^{\log_5 2}$, $x + 1 = \log_5 2$, $\log_5 2 - 1$; **d)** 2, 2, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

337. **a)** $1\frac{1}{3}$; **b)** $3\frac{6}{7}$; **c)** $x = \frac{1}{3}$; **d)** sprendinių nėra; **e)** 4; **f)** sprendinių nėra.

338. **a)** Suvienodiname pagrindus: $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$.
Pasižymime $y = 3^x$, tada $9^x = (3^x)^2 = y^2$, $y^2 - 8y - 9 = 0$,
$D = 64 + 36 = 10^2$, $y_1 = 9$, $y_2 = -1$.
Pradinės lygties sprendinius randame įsirašę y_1 ir y_2 reikšmes:
$3^x = 9$, $x = 2$.
$3^x = -1$, sprendinių nėra.
d) $7^x \cdot 7^2 - 7^x \cdot 7^{-1} = 342$, pasižymime $7^x = y$.
$49y - \frac{1}{7}y = 342$, $\frac{342}{7}y = 342$, $y = 7$.
Pradinės lygties sprendiniai $7^x = 7$, $x = 1$.
Galima spręsti ir kitaip.
Iškeliame prieš skliaustus 7 su mažiausiu laipsnio rodikliu:
$7^{x-1}(7^{x+2-(x-1)} - 1) = 342$, $7^{x-1} \cdot 342 = 342$,
$7^{x-1} = 1$, $x - 1 = 0$, $x = 1$.

Atsakymai. **a)** $x = 2$; **b)** $x = 1$, $x = 3$; **c)** $x = 3$; **d)** $x = 1$.

Priminkite mokiniams, kad $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

7.3. Rodiklinės nelygybės

Rodiklinių nelygybių sprendimas grindžiamas tuo, kad $f(x) = a^x$, kai $a > 1$ yra didėjančioji, o kai $0 < a < 1$ — mažėjančioji funkcija.

Mokiniai turėtų mokėti spręsti paprasčiausias nelygybes suvienodinę laipsnių pagrindus.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 339.
Vidutinis lygmuo: 340, 341.

339. **e)** $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $x \leqslant 2$;
f) $\left(\frac{1}{5}\right)^x < 1$, $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^0$, $x > 0$.
Atsakymai. **a)** $x \in (3; +\infty)$; **b)** $x \in [2; +\infty)$; **c)** $x \in (-\infty; 0]$;
d) $x \in [3; +\infty)$; **e)** $x \in (-\infty; 2]$; **f)** $x \in (0; +\infty)$.

Patarkite mokiniams vadovautis algoritmu pateiktu vadovėlio 183 p.

340. **a)** $x \in (-\infty; -1)$; **b)** $x \in [-1\frac{2}{3}; +\infty)$; **c)** $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;
d) $x \in (-1; 4)$.

341. **a)** Funkcijos $y = a^x$ reikšmė, kai $x = 1$, yra $a^1 = 2$, t. y. $a = 2$. Funkcijos $y = 2^x$ grafikas, kai $x > 2$ yra aukščiau už tiesės $y = b$ grafiką, o $2^x = b$, kai $x = 2$, taigi spręsta nelygybė $2^x \geqslant 4$.
b) Funkcijos $y = a^x$ reikšmė, kai $x = -1$, yra $a^{-1} = 3$, t. y. $a = \frac{1}{3}$. Kai $x < 0$, funkcijos $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ grafikas yra aukščiau už tiesės $y = 1$ grafiką, taigi spręsta nelygybė $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$.
c) Funkcijos $y = a^x$ reikšmė, kai $x = 2$, yra $a^2 = 3$, t. y. $a = \sqrt{3}$ (reikšmė $a = -\sqrt{3}$ netinka, nes rodiklinės funkcijos pagrindas $a > 0$). Funkcijos $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ grafikas, visoms x reikšmėms yra aukščiau už tiesės $y = -2$ grafiką. Spręsta nelygybė $\left(\sqrt{3}\right)^x > -2$ arba $\left(\sqrt{3}\right)^x \geqslant -2$.
d) Funkcijos $y = a^x$ reikšmė, kai $x = 2$, yra $a^2 = \frac{1}{4}$, t. y. $a = \frac{1}{2}$. Funkcijos $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ grafikas visoms x reikšmėms yra aukščiau už tiesės $y = -1$ grafiką, Kadangi grafikai nesikerta ir sprendinių nėra parodyta, tai nelygybė buvo $\left(\frac{1}{2}\right)^x < -1$ arba $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant -1$.

7.4. Rodiklinis kitimas

Šiame skyrelyje pateikti rodiklinio kitimo pavyzdžiai iliustruoja, kaip realius procesus galima modeliuoti rodiklinėmis funkcijomis, atskleidžia matematikos ryšį su praktika.

Paprasčiausiais atvejais mokiniai turėtų:

- *mokėti* užrašyti atitinkamas rodiklines funkcijas;
- *apskaičiuoti* rodiklinių funkcijų reikšmes, kai žinomos argumento reikšmės, ir atvirkščiai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 342–345, 350.
Vidutinis lygmuo: 352–354.
Aukštesnysis lygmuo: 347, 349, 351.

342. **a)** Buvo 100 bakterijų. Kasdien bakterijų skaičius padvigubėja:
po 1 dienos — $100 \cdot 2 = 200$ bakterijų,
po 2 dienų — $(100 \cdot 2) \cdot 2 = 100 \cdot 2^2 = 400$ bakterijų,
po 3 dienų — $(100 \cdot 2^2) \cdot 2 = 100 \cdot 2^3 = 800$ bakterijų,
....
po 10 dienų — $100 \cdot 2^{10} = 102\,400$ bakterijų,
po n dienų — $100 \cdot 2^n$ bakterijų.
Bakterijų skaičius bus 1000 kartų didesnis po x dienų: $100 \cdot 2^x = 100 \cdot 1000$, $2^x = 1000$, $x = \log_2 1000$.
Jei norime apytikriai sužinoti x reikšmę galime pasinaudoti formule $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ir užrašyti $\log_2 1000 = \frac{\lg 1000}{\lg 2}$. Žinodami, kad $\lg 1000 = 3$, skaičiuokliu rasime $\log_2 1000 = \frac{\lg 1000}{\lg 2} \approx 9{,}966 \approx 10$.
Galima galvoti kitaip: pastebime, kad 10 dieną bakterijų bus 102 400, t. y. apie 1000 kartų daugiau.

Atsakymai. **a)** 200, 800, 102 400, $100 \cdot 2^n$;
b) 300, 1200, 1 536 000, po 10 dienų, $150 \cdot 2^n$;
c) 400, 1600, 20 480, $200 \cdot 2^n$, po 10 dienų.

343. **a)** Bakterijų buvo 1000. Po dienos liko pusė $1000 \cdot 0{,}5 = 500$; dar po dienos $(1000 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}5 = 1000 \cdot 0{,}5^2$ ir t. t. po n dienų — $1000 \cdot 0{,}5^n$ bakterijų.
Po 4 dienų bus $1000 \cdot 0{,}5^4$ maždaug 62 bakterijos.
Po 10 dienų — $1000 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}98$, t. y. 1 bakterija iš 1000.

Atsakymai. **a)** $500 \approx 62$, 1, per 10 d.;
b) 5000, 625, ≈ 10, sumažėjo 1000 kartų per 10 dienų;
c) 500 000, 62 500, ≈ 1000, sumažėjo 1000 kartų per 10 dienų.

344. Jei prekės kaina didinama 5%, tai po padidinimo ji kainuoja 105% buvusios kainos.
Po n-tojo padidinimo prekė kainuos $K_n = K \cdot 1{,}05^n$.

Atsakymai. **a)** 10,5 Lt, 11,03 Lt, 12,76 Lt, $10 \cdot 1{,}05^n$ Lt.
b) 105 Lt, 110,3 Lt, 127,63 Lt, $100 \cdot 1{,}05^n$ Lt;
c) 1050 Lt, 1102,5 Lt, 1276,28 Lt, $1000 \cdot 1{,}05^n$.

345. Žuvų po metų lieka $100 - 7 = 93\%$ buvusio kiekio.
a) 1860, 1730, 1609, 468, $2000 \cdot 0{,}93^t$.
b) 1800, 1620, 1458, 243, $2000 \cdot 0{,}9^t$.
c) $2000\left(1 - \frac{n}{100}\right)$, $2000\left(1 - \frac{n}{100}\right)^2$, $2000\left(1 - \frac{n}{100}\right)^3$, $2000\left(1 - \frac{n}{100}\right)^{20}$, $2000\left(1 - \frac{n}{100}\right)^t$.

346. Sudėtines palūkanas apskaičiuojame pagal formulę:
$S_n = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$,
čia S_0 — pradinis indėlis, S_n — indėlio dydis su palūkanomis po n metų.
$S_5 = 2000 \cdot (1 + 0{,}05)^5 = 2000 \cdot 1{,}05^5 \approx 2552{,}56$ Lt.
Kai $S_n = 2205$, tai $2205 = 2000 \cdot 1{,}05^n$, $1{,}05^n = 2205 : 2000$, $1{,}05^n = 1{,}1025$.
Ieškome tokio n, kuriuo keldami 1,05 gausime 1,1025. Toks laipsnis bus $n = 2$.

Atsakymas. 2552,56 Lt. Sąskaitoje 2205 Lt bus po 2 metų.

347. Jei pradžioje talpykloje buvo A litrų benzino, o per savaitę išgaruoja 20% talpykloje esančio benzino kiekio, tai lieka 80(%) buvusio benzino kiekio.

Po I savaitės lieka $A \cdot 0{,}8$ benzino.

Po II savaitės lieka $(A \cdot 0{,}8) \cdot 0{,}8 = A \cdot 0{,}8^2$, tai išgaravo $A - A \cdot 0{,}8^2 = A(1 - 0{,}8^2) = A(1 - 0{,}64) = A \cdot 0{,}36$, tai yra 36% pradinio kiekio.

Po III savaitės talpoje lieka $A \cdot 0{,}8^3$, tai išgaravo $A - A \cdot 0{,}8^3 = A \cdot (1 - 0{,}8^3) = A(1 - 0{,}512) = A \cdot 0{,}488$ tai yra 48,8% pradinio kiekio.

Po IV savaičių talpoje lieka $A \cdot 0{,}8^4$, tai išgaravo $A - A \cdot 0{,}8^4 = A \cdot (1 - 0{,}8^4) = A(1 - 0{,}4096) = A \cdot 0{,}5904$ tai yra 59,04% pradinio kiekio.

Atsakymas. 36%, 48,8%, 59,04%.

348. Kai $t = 0$, tai buvo $B(0) = 3000 \cdot 16^0 = 3000$ bakterijų.

Kai $t = \frac{1}{4}$ h, tai $B\left(\frac{1}{4}\right) = 3000 \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 3000 \cdot 2 = 6000$ bakterijų.

Kai $t = \frac{1}{2}$ h, tai $B\left(\frac{1}{2}\right) = 3000 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 3000 \cdot 4 = 12\,000$ bakterijų.

Kai $t = 1$ h, tai $B(1) = 3000 \cdot 16 = 48\,000$ bakterijų.

Pastebime, kad bakterijų padvigubės (bus 6000) po $\frac{1}{4}$ h.

Atsakymas. 3000, 6000, 12 000, 48 000, po $\frac{1}{4}$ h.

349. Po 1 savaitės liko $V(1) = 1000 \cdot (0{,}6)^1 = 600\,\text{m}\ell$ skysčio. Apskaičiuojame, kada inde bus apytiksliai $1\,\text{m}\ell$ skysčio:

$1000 \cdot (0{,}6)^t = 1 \,|\, : 1000$,

$(0{,}6)^t = 0{,}001$, $t = \log_{0,6} 0{,}001$

$t = \frac{\lg 0{,}001}{\lg 0{,}6} \approx \frac{-3}{-0{,}2218} \approx 13{,}5$.

Po t savaičių turi likti $1000 \cdot (0{,}6)^t < 1$.

Kadangi skystis iš indo garuoja, tai jo kiekis mažėja. Jei po 13,5 savaičių inde bus apie $1\,\text{m}\ell$ skysčio, tai po 14 savaičių liks mažiau kaip $1\,\text{m}\ell$.

Atsakymas. $600\,m\ell$, po 14 savaičių.

Pastaba

Pasinaudosime formule $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

350. Kad funkcijos $f(x) = m \cdot 8^x$ grafikas eitų per tašką (0; 4), funkcijos reikšmė $f(0)$ turi būti lygi 4: $f(0) = m \cdot 8^0$, $4 = m \cdot 8^0$, $m = 4$.

$A(1; 32)$: $32 = 4 \cdot 8^1$, $32 = 32$. Taškas A priklauso funkcijos grafikui.

Taškas $C(-1; 2)$ nepriklauso funkcijos grafikui, nes $2 \neq 4 \cdot 8^{-1}$, $2 \neq \frac{4}{8}$, $2 \neq 0{,}5$.

Atsakymas. $m = 4$. Taškai A, B ir D — priklauso funkcijos grafikui, C — nepriklauso.

Priminkite mokiniams

Taškas priklauso funkcijos grafikui, jei jo koordinates įstačius į funkcijos išraišką (x — argumento reikšmė, y — funkcijos reikšmė), gauname teisingą lygybę.

351. Bakterijų kiekis kinta pagal dėsnį $B(t) = 1000 \cdot k^t$, kur $B(t)$ — bakterijų kiekis po t valandų; k — tiek kartų pakinta jų skaičius per valandą; t — laikas valandomis.

Kai $t = 3$, $B(3) = 8000$, $1000k^3 = 8000$, $k^3 = 2^3$, $k = 2$.

Kitimo dėsnis $B(t) = 1000 \cdot 2^t$.

Po x valandų bakterijų kiekis bus 2000; $1000 \cdot 2^x = 2000$, $2^x = 2$, $x = 1$.

Atsakymas. $B(t) = 1000 \cdot 2^t$, po 1 val., po 5 val.

352. Skolos dydis kartu su palūkanomis apskaičiuojamas pagal formulę $S_n = 20\,000\left(1 + \frac{10}{100}\right)^n$, $S_n = 20\,000 \cdot (1{,}1)^n$.

Po x metų skola bus $32\,210{,}20 = 20\,000 \cdot (1{,}1)^x$, $(1{,}1)^x = 1{,}61\,051$.

Galime x reikšmę spėti ir pasitikrinti skaičiuokliu arba nuosekliai kelti 1,1 laipsniu, kol gausime 1,61051. Toks laipsnis bus 5.

Atsakymas. Po 5 m.

353. **1)** Per metus 1000 svarų sterlingų suma padidėja 1,05 karto, tai per 100 metų $(1{,}05)^{100}$ kartų.

2) 31 501 svarų sterlingų suma per 100 metų taip pat padidės $(1{,}05)^{100}$ kartų.

3) Jei po 100 metų susidarė $100\,000 + 31\,501 = 131\,501$ svarų sterlingų suma, tai, įrašę reikšmes į sudėtinių palūkanų skaičiavimo formulę, rasime $1{,}05^{100}$ reikšmę:

$131\,501 = 1000 \cdot (1{,}05)^{100}$, $1{,}05^{100} = 131\,501 : 1000$, $1{,}05^{100} = 131{,}501$.

Atsakymai. **1)** $(1{,}05)^{100}$ kartų; **2)** $(1{,}05)^{100}$ kartų; **3)** $\approx 131{,}501$.

354. Per parą ištekės 0,1 inde buvusio vandens, tad vandens liks 0,9 buvusio kiekio. Per x parų liks $V_x = V_0 \cdot (0{,}9)^x$ (žr. 347 uždavinį). Kai iš indo ištekės pusė vandens, tai inde liks irgi pusė buvusio kiekio: $V_x = 0{,}5V_0$.
Įrašome reikšmę į formulę $0{,}5V_0 = V_0 \cdot (0{,}9)^x$, $(0{,}9)^x = 0{,}5$.
Nuosekliai keldami 0,9 laipsniu pastebime, kad $0{,}9^6 = 0{,}531441$; o $0{,}9^7 = 0{,}4782969$. Tai reiškia, kad pusė skysčio išgaruos septintą parą.
Galima skaičiuoti ir kitaip: $(0{,}9)^x = 0{,}5$, $x = \log_{0{,}9} 0{,}5$, pertvarkom
$x = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}9} \approx \frac{-0{,}3010}{-0{,}0458} \approx 6{,}572 \approx 7$.
Atsakymas. Per 7 paras.

7.5. Geometrijos uždaviniai

Uždaviniai 355 ir 357 — teorinių žinių apie ritinį praktinio taikymo pavyzdžiai. Šiuos uždavinius turėtų spręsti visi mokiniai. Nors 356 uždavinys irgi yra apie ritinį, juo galime pailiustruoti algebros taikymą geometrijos uždaviniams spręsti. Jį geriausia spręsti sudarant lygčių sistemą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

355. **1)** Etiketės plotas lygus ritinio šoninio paviršiaus plotui $S = 8\pi \cdot 13 = 104\pi \approx$ $\approx 326{,}6\,\text{cm}^2$.
2) **a)** Vieno sausainio aukštis 3 mm $= 0{,}3$ cm, pagrindo spindulys $r_s = 78 : 2 =$ $= 39\,(\text{mm}) = 3{,}9\,\text{cm}$. Sudėtų sausainių aukštis $h = 13\,\text{cm}$. Sausainių tilps $13 : 0{,}3 = 43{,}(3)$, t. y. 43 sausainiai.
b) 43 sausainių tūris $V_s = 43 \cdot \pi(3{,}9)^2 \cdot 0{,}3 = 196{,}209 \cdot \pi \approx 616\,\text{cm}^3$. Visi sausainiai svers ≈ 616 g.
3) **a)** Ruošinio plotas $S_{\text{ruošinio}} = \pi(4{,}5)^2 \approx 63{,}6\,\text{cm}^2$;
b) Dangtelio viršaus plotas $S_{\text{viršaus}} = \pi(4{,}1)^2 \approx 52{,}8\,\text{cm}^2$;
c) Pakraščio plotas $S = S_{\text{ruošinio}} - S_{\text{viršaus}} - S_{\text{išpjovų}} \approx 63{,}6 - 52{,}8 - 6 \cdot 0{,}08 =$ $= 10{,}32\,\text{cm}^2$;
d) Išpjovos sudarė $x\%$.
Užrašome lygtį: $S_{\text{ruošinio}} \cdot x \cdot 100 = S_{\text{išpjovų}}$;
$63{,}6 \cdot \frac{x}{100} = 6 \cdot 0{,}08, \quad x = \frac{6 \cdot 0{,}08 \cdot 100}{63{,}6} \approx 0{,}8\%$.
e) Dėžutės tūris:
$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 13 = \pi \cdot 208\,\text{cm}^3 \approx 653\,\text{cm}^3 \approx 0{,}65\,\text{dm}^3 \approx 0{,}6$ litro.

Atsakymai. **1)** $326{,}6\,\text{cm}^2$; **2)** **a)** 43 sausainiai; **b)** 616 g;
3) **a)** $63{,}6\,\text{cm}^2$; **b)** $52{,}8\,\text{cm}^2$; **c)** $10{,}3\,\text{cm}^2$; **d)** 8%; **e)** $0{,}6\ell$.

Pastaba
Atkreipkite mokinių dėmesį, kad apvaliname ne pagal taisykles, o į didesniąją pusę. Akivaizdu, kad į $0{,}65\,\text{dm}^3$ talpos indą tilps tik 0,6 litro.

356. Ritinio ašinis pjūvis yra stačiakampis, kurio aukštis lygus ritinio aukštinei, o plotis — ritinio pagrindo skersmeniui.
$S_{\text{pjūvio}} = 2rH$, pagal sąlygą lygus $80\,\text{cm}^2$. Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2rH = 80, \\ H = 3 + r. \end{cases}$$

Įsistatome antrąją lygtį į pirmąją:
$2r(3 + r) = 80, \ r^2 + 3r - 40 = 0,$
$r_1 = 5, \quad r_2 = -8$ (netinka pagal prasmę).
$H = 8, \ S_{\text{visas}} = 2\pi r(H + r)$.
$S_{\text{visas}} = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 8) = 130\pi \approx 408{,}4\,\text{cm}^2$.
$V = \pi r^2 H, \ V = \pi \cdot 25 \cdot 8 = 200\pi \approx 628\,\text{cm}^3$.

Atsakymai. **a)** $S_{\text{visas}} = 408{,}2\,\text{cm}^2$; **b)** $V = 628\,\text{cm}^3$.

357. **1)** Rąsto skerspjūvis yra skritulys. Į jį turi tilpti kvadratas, kurio kraštinė 25 cm. Kvadrato įstrižainė $d^2 = 2 \cdot 25^2$, $d = 25\sqrt{2}$. Mažiausias galimas rąsto skersmuo $d \approx 35{,}36$ cm. Todėl $d = 36$ cm, spindulys $r = 18$ cm.
2) Atliekų tūris yra

$V_{\text{atliekų}} = V_{\text{rąsto}} - V_{\text{gegnės}} = \pi r^2 H - a^2 H = H(\pi r^2 - a^2)$.

Suvienodiname matavimo vienetus: 5 m = 500 cm.

$V_{\text{atliekų}} = 500(3{,}14 \cdot 18^2 - 25^2) = 196\,438\,\text{cm}^3 \approx 0{,}2\,\text{m}^3$.

Atliekos sudarys $x\%$ rąsto tūrio:

$V_{\text{rąsto}} \cdot \frac{x}{100} = V_{\text{atliekų}}, \quad x = \frac{196\,438 \cdot 100}{3{,}14 \cdot 18^2 \cdot 500} \approx 38{,}6\%$.

Atsakymai. **1)** 36 cm; **2)** $0{,}2\,\text{m}^2$, 38,6%.

Priminkite mokiniams
Į skritulį įbrėžto kvadrato įstrižainė lygi skritulio skersmeniui. Apibrėžto apie kvadratą apskritimo centras yra įstrižainių susikirtimo taške.

Pastaba
Rašydami 1 cm tikslumu negalime mažinti skersmens dydžio, nors pagal apvalinimo taisykles turėtų būti 35 cm.

8. LOGARITMINĖ FUNKCIJA

8.1. Logaritmas

Išnagrinėję skyrelio medžiagą mokiniai turėtų:

- *žinoti* logaritmo apibrėžimą, reikalavimus pologaritminiam reiškiniui ir logaritmo pagrindui;
- *mokėti* apskaičiuoti logaritmo reikšmę, kai ji yra sveikasis skaičius;
- *pasinaudoti* skaičiuokliu dešimtainių logaritmų apytikslėms reikšmėms rasti;
- *suvokti* ir paaiškinti pagrindinės logaritminės tapatybės $b^{\log_b a} = a$ prasmę bei gebėti ja remtis paprasčiausiais atvejais.

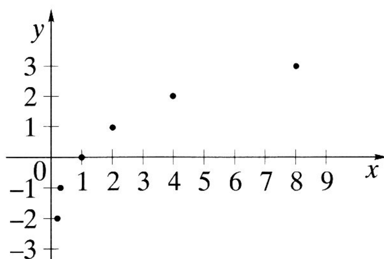
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 1–5.
Vidutinis lygmuo: 6a, 7a,b.
Aukštesnysis lygmuo: 6b,c, 7c,d.

1. **a)** 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3; **b)** −1, −3, 2, 4, 0, 1, −2.

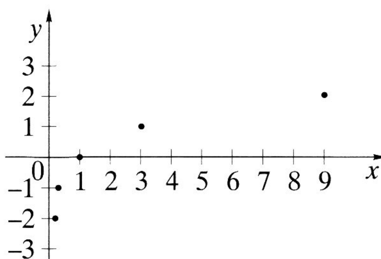
2. **a)** $\log_2 x = y$

$x =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y =$	−2	−1	0	1	2	3



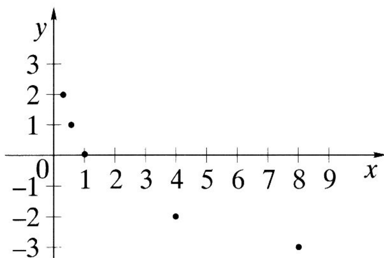
b) $\log_3 x = y$

$x =$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y =$	−2	−1	0	1	2



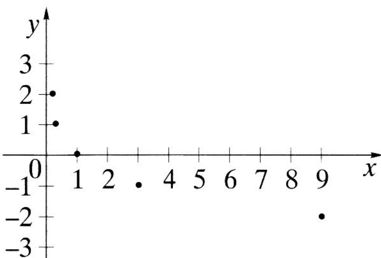
c) $\log_{\frac{1}{2}} x = y$

$x =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y =$	2	1	0	−1	−2	−3



d) $\log_{\frac{1}{3}} x = y$

$x =$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y =$	2	1	0	−1	−2



3. **a)** 0, 1, 2, 4, 9; **b)** −3, −4, −6.

4. **a)** $\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} \approx 2{,}322$. Galima skaičiuoti skaičiuokliu:

[5] [lg] [:] [2] [lg] [=]

Atsakymai. **a)** 2,32, 2,81, 3,59; **b)** −0,63, −1,10, 0,17; **c)** 0,30, 1,08, 2,02.

Pastaba

Įprastais skaičiuokliais negalima apskaičiuoti $\log_b a$ reikšmių. Juose būna tik $\ln a$ ir $\lg a$. Matyt, taip yra dėl to, kad logaritmo pagrindą galima pakeisti formule: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.
Taigi, skaičiuojant a) punkto logaritmų reikšmes (ir toliau) teks remtis logaritmo pagrindo keitimo formule, nors ji neįeina į programą.

5. **1) d)** $\lg(x^2)$ turi prasmę, kai $x^2 > 0$, o x^2 teigiamas visoms x reikšmėms, išskyrus nulį.
2) d) Logaritmo pagrindas turi būti didesnis už nulį ir nelygus vienetui.

Užrašome sistemą: $\begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$

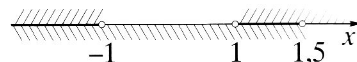
Matome, kad tinka visos x reikšmės, išskyrus 0 ir ±1.

Atsakymai. **1) a)** $x > 0$; **b)** $x > -1$; **c)** $x < 0$; **d)** $x \neq 0$; **e)** $x > 0$.
2) a) $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; **b)** $x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$;
c) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$; **d)** $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$;
e) $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

6. **b)** Visas logaritmo apibrėžimo sąlygas surašome į sistemą ir ieškome jos bendrų sprendinių.

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ 3 - 2x > 0, \\ 3 - 2x \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ -2x > -3, \\ 2x \neq -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1,\ x > 1, \\ x < 1{,}5, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Visus sistemos sprendinius pažymime vienoje skaičių ašyje ir randame bendrus: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 1{,}5)$.



c)

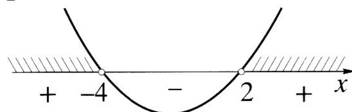
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0, \\ 3x - x^2 > 0, \\ 3x - x^2 \neq 1. \end{cases}$$

Sprendžiame kiekvieną nelygybę.

I. $x^2 + 2x - 8 = 0$, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$;

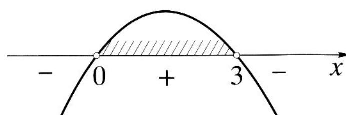
II. $3x - x^2 = 0$, $x(3 - x) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

I



$x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

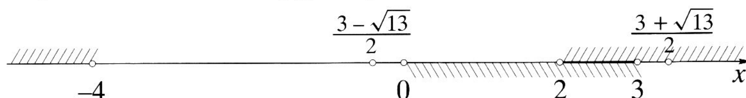
II



$x \in (0; 3)$.

$3x - x^2 \neq 1$, $x_1 \neq \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $x_2 \neq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Pažymime bendruosius nelygybių sprendinius skaičių tiesėje.



Atsakymai. **a)** $x \in (0; +\infty)$; **b)** $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 1{,}5)$; **c)** $x \in (2; 3)$.

7. **a)** -2; **b)** $1{,}5$; **c)** 3; **d)** $\frac{1}{5}$.

8.2. Funkcija $f(x) = \log_a x$

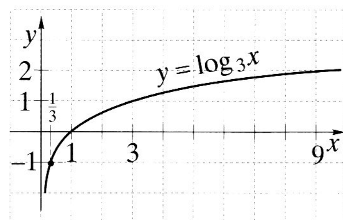
Šiame skyrelyje nagrinėjama mokiniams nauja logaritminė funkcija, jos grafikas ir savybės. Mokiniai turėtų:

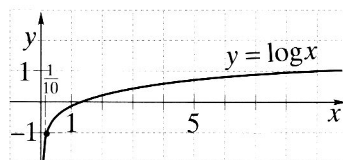
- *žinoti* logaritminės funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis;
- *gebėti* nusakyti, kada logaritminė funkcija yra didėjanti, kada mažėjanti, kuriuose intervaluose funkcijos reikšmės teigiamos, kuriuose neigiamos, pasinaudoti charakteringais logaritminės funkcijos grafiko taškais (1; 0) ir (*a*; 1) braižant funkcijos grafiko eskizą;
- *mokėti* nubraižyti logaritminės funkcijos grafiko eskizą, kai $a > 1$ ir kai $0 < a < 1$;
- *gebėti* taikyti logaritminės funkcijos savybes įvairioms paprastoms užduotims spręsti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 8, 10, 11, 13a–d,f,h, 14, 15, 17–19, 21a–d, 22, 23.
Vidutinis lygmuo: 9, 12, 13e,g–l, 16, 20, 21e–j, 24.
Aukštesnysis lygmuo: 13n, 25.

8. **a)** 1) $D_f = (0; +\infty)$; 2) $E_f = (-\infty; +\infty)$; 3) funkcija didėjanti, nes argumento x reikšmėms didėjant, funkcijos reikšmės y taip pat didėja; 4) kai $0 < x < 1$, $y < 0$; 5) kai $x > 1$, $y > 0$; 6) kai $x = 1$, $y = 0$; 7) kai $x = 3$, $y = 1$; 8) funkcija nei lyginė, nei nelyginė.
b) 1) $D_f = (0; +\infty)$; 2) $E_f = (-\infty; +\infty)$; 3) funkcija didėjanti; 4) kai $0 < x < 1$, $y < 0$; 5) kai $x > 1$, $y > 0$; 6) kai $x = 1$, $y = 0$; 7) kai $x = 10$, $y = 1$; 8) funkcija nei lyginė, nei nelyginė.





9. Išsiaiškinsime, kurios funkcijos grafikas yra aukščiau, kai $x > 1$.
Kai $x = 3$, $\log_3 3 = 1$, kai $x = 2$, $\log_2 2 = 1$. Kadangi $f(x)$ didėjančioji funkcija (pagrindas $2 > 1$), tai x reikšmei padidėjus nuo 2 iki 3 funkcijos reikšmė taip pat padidės, todėl $f(3) = \log_2 3 > 1$.
Matome, kai $x = 3$, $g(3) = 1$, o $f(3) > 1$, tai funkcijos $f(x)$ reikšmė didesnė už funkcijos $g(x)$ reikšmę ir funkcijos $f(x)$ grafiko taškas $(3; \log_2 3)$ yra aukščiau už funkcijos $g(x)$ grafiko tašką $(3; \log_3 3)$.
Atsakymas. $f(x)$ grafikas yra (1), $g(x)$ — (2).

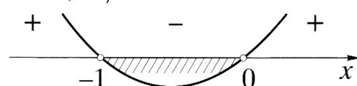
10. $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$, $(9; 2)$, $\left(\frac{1}{27}; -3\right)$.

11. Funkcija $f(x) = \log_2 x$ yra didėjanti. Tai reiškia, kad didėjant x reikšmėms, $\log_2 x$ reikšmės didėja.
Atsakymas. $\log_2 \frac{1}{64}$, $\log_2 \frac{1}{23}$, $\log_2 \frac{1}{22}$, $\log_2 \frac{1}{8}$, $\log_2 8$, $\log_2 22$, $\log_2 23$, $\log_2 64$.

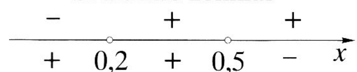
Priminkite mokiniams, kad logaritmas turi prasmę, kai pologaritminis reiškinys yra teigiamas skaičius, o logaritmo pagrindai $a > 0$, $a \neq 1$.

12. **a)** 2; **b)** 2,5; **c)** 1,5; **d)** $\sqrt[4]{3}$.

13. **h)** $-x^2 - x > 0 \mid \cdot (-1)$,
$x^2 + x < 0$, $x(x+1) = 0$, $x = 0$, $x = -1$.
Parabolė $y = x^2 + x$ kerta x ašį taškuose $x = 0$ ir $x = -1$, šakos eina aukštyn.
Iš brėžinio nustatome intervalus, kuriuose $x^2 + x < 0$.



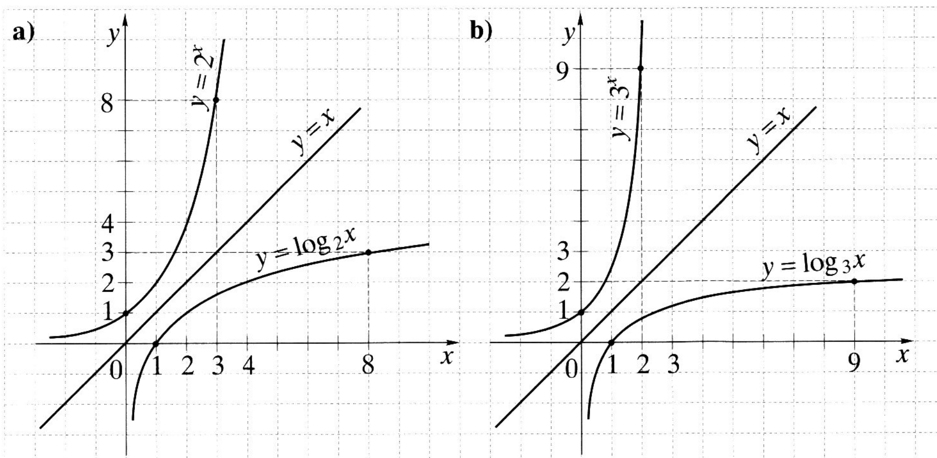
n) Randame reikšmes, su kuriomis skaitiklis ir vardiklis virsta nuliu.
$5x - 1 = 0$, $x = 0{,}2$; $5 - 2x = 0$, $x = 2{,}5$.
Taške $x = 0{,}2$ skaitiklis, o taške $x = 2{,}5$ vardiklis keičia ženklą. Nustatome trupmenos ženklą pasinaudodami skaičių tiese.
Trupmenos skaitiklio ir vardiklio ženklai vienodi intervale (0,2; 2,5).

Skaitiklio ženklas


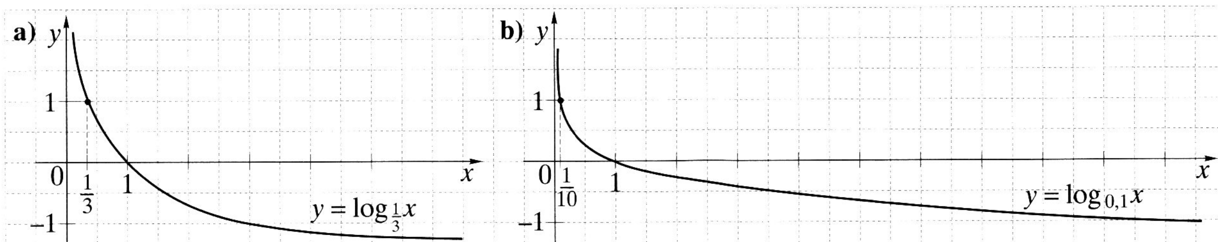
Vardiklio ženklas

Atsakymai. **a)** $(-5; +\infty)$; **b)** $(-\infty; 5)$; **c)** $(5; +\infty)$; **d)** $(-\infty; 2)$;
e) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; **f)** $(0; +\infty)$; **g)** $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; **h)** $(-1; 0)$;
i) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; **j)** R; **k)** R; **l)** $(-2; 3)$; **m)** $(5; +\infty)$; **n)** $(0{,}2; 2{,}5)$.

14. Grafikai simetriški tiesės $y = x$ (koordinatinio kampo pusiaukampinės) atžvilgiu.



15.



a) 1) $D_f = (0; +\infty)$; 2) $E_f = (-\infty; +\infty)$; 3) funkcija mažėjanti; 4) kai $0 < x < 1$, $y > 0$; 5) kai $x > 1$, $y < 0$; 6) kai $x = 1$, $y = 0$; 7) kai $x = \frac{1}{3}$, $y = 1$; 8) nei lyginė, nei nelyginė.
b) 1) $D_f = (0; +\infty)$; 2) $E_f = (-\infty; +\infty)$; 3) funkcija mažėjanti; 4) kai $0 < x < 1$, $y > 0$; 5) kai $x > 1$, $y < 0$; 6) kai $x = 1$, $y = 0$; 7) kai $x = 0{,}1$, $y = 1$; 8) nei lyginė, nei nelyginė.

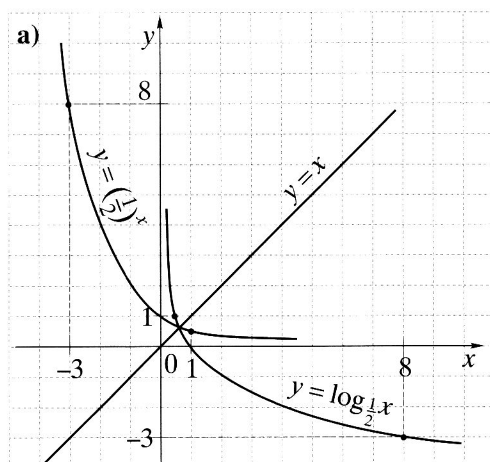
16. (1) — $g(x)$; (2) — $f(x)$.

17. Funkcijos grafikui priklauso taškai: $(1; 0)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $(3; -1)$, $(9; -2)$, nepriklauso — $(3; 1)$, $(9; 2)$.

18. Funkcija $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ yra mažėjanti. Todėl, didėjant x reikšmėms, funkcijos reikšmės mažėja.

Atsakymas. $\log_{\frac{1}{2}} 64$, $\log_{\frac{1}{2}} 23$, $\log_{\frac{1}{2}} 22$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{22}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{23}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$.

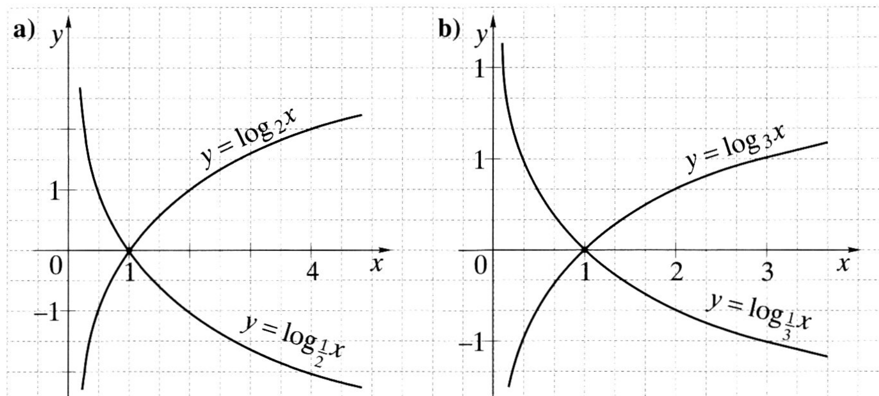
19. Grafikai simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.



20. **a)** $a = \frac{1}{2}$; **b)** $a = \frac{3}{4}$.

21. **a)** $(-2; +\infty)$; **b)** $(-\infty; 2)$; **c)** $(-1{,}6; \infty)$; **d)** $\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right)$; **e)** $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; **f)** $(0; +\infty)$; **g)** $(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$; **h)** $(0; 2{,}5)$; **i)** $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; **j)** $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

22. Funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikai simetriški x ašies (tiesės $y = 0$) atžvilgiu.



23. **a)** $\log_{\frac{1}{3}} 6 < \log_{\frac{1}{3}} 2$, $\log_3 6 > \log_3 2$; **b)** $\log_{\frac{1}{2}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 9$, $\log_2 5 < \log_2 9$;
c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $\log_3 \frac{1}{6} < \log_3 \frac{1}{2}$; **d)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}$, $\log_2 \frac{2}{5} > \log_2 \frac{2}{9}$.
Jei dviejų logaritmų pagrindai yra vienodi ir:

- didesni už vienetą, tai didesnis tas logaritmas, kurio *pologaritminis skaičius didesnis*;
- mažesni už vienetą, tai didesnis tas logaritmas, kurio *pologaritminis skaičius mažesnis*.

24. **1)** $\log_a b > \log_a c$, jei $a > 1$, $b > c$; **2)** $\log_a b < \log_a c$, jei $a > 1$, $b < c$;
3) $\log_a b < \log_a c$, jei $a < 1$, $b > c$; **4)** $\log_a b > \log_a c$, jei $a < 1$, $b < c$.

25. **1)** Atitinkamybės ieškosime pagal tokį planą:

- Atrenkame rodiklinių funkcijų grafikus ir logaritminių funkcijų grafikus.
- Išrenkame didėjančiųjų ir mažėjančiųjų funkcijų grafikus.
- Pasitikriname pagal pažymėtus taškus, kurios funkcijos grafikui jie priklauso.
- Randame nežinomas taškų koordinates.

Rodiklinės funkcijos
c), **e)**, **f)** yra rodiklinių funkcijų grafikai, tai gali būti $g(x)$, $k(x)$, $m(x)$.
Tik viena $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ mažėjanti, jos grafikas **e)**.
Grafike **c)** žinome tašką $(1; 2)$. Jo koordinates rašome į funkcijų $k(x)$ ir $m(x)$ išraiškas: $m(1) = 3$ (netinka), $k(1) = 2$.
Taigi **c)** yra funkcijos $k(x)$ grafikas, **f)** yra funkcijos $m(x)$ grafikas.

Logaritminės funkcijos
a), **b)**, **d)** yra logaritminių funkcijų grafikai, tai gali būti $f(x)$, $h(x)$, $l(x)$.
Tik viena $h(x) = \log_2 x$ didėjanti, jos grafikas **b)**.
Grafike **a)** žinome tašką $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, jo koordinates įrašome į funkcijų $f(x)$ ir $l(x)$ išraiškas: $l\left(\frac{1}{2}\right) \neq 1$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$ (lygybė teisinga).
Taigi **a)** yra funkcijos $f(x)$ grafikas, o **d)** yra funkcijos $l(x)$ grafikas.

2) Norėdami sužinoti, ką rašyti vietoj klaustukų, įsirašome žinomą taško koordinatę į funkcijos išraišką ir apsiskaičiuojame nežinomą koordinatę:
a) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$; $y = -1$; **b)** $\log_2 x = 2$, $x = 1$; **c)** $2^{-1} = 0{,}5$, $y = 0{,}5$;
d) $\log_{\frac{1}{3}} x = -1$, $x = 3$; **e)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, $y = 2$; **f)** $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

Atsakymai.
1) $f(x)$ — **a)**; $h(x)$ — **b)**; $k(x)$ — **c)**; $l(x)$ — **d)**; $g(x)$ — **e)**; $m(x)$ — **f)**;
2) **a)** $y = -1$; **b)** $x = 4$; **c)** $y = \frac{1}{2}$; **d)** $x = 3$; **e)** $y = 2$; **f)** $y = \frac{1}{3}$.

8.3. Logaritminės lygtys

Mokiniai mokosi spręsti logaritmines lygtis pasinaudodami logaritmo apibrėžimu arba tuo, kad, jei logaritmai vienodais pagrindais yra lygūs, tai ir pologaritminiai reiškiniai yra lygūs.

Sprendžiant lygtis reikia:

- gerai *žinoti* logaritmo apibrėžimą;
- *mokėti* skaičių užrašyti logaritmu reikiamu pagrindu: $2 = \log_2 4 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ ir pan.;
- neužmiršti *patikrinti*, ar gautoji nežinomojo reikšmė yra pradinės logaritminės lygties sprendinys.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 26, 29, 31a,b.
Vidutinis lygmuo: 27, 28, 31c,d, 32.
Auikštesnysis lygmuo: 30.

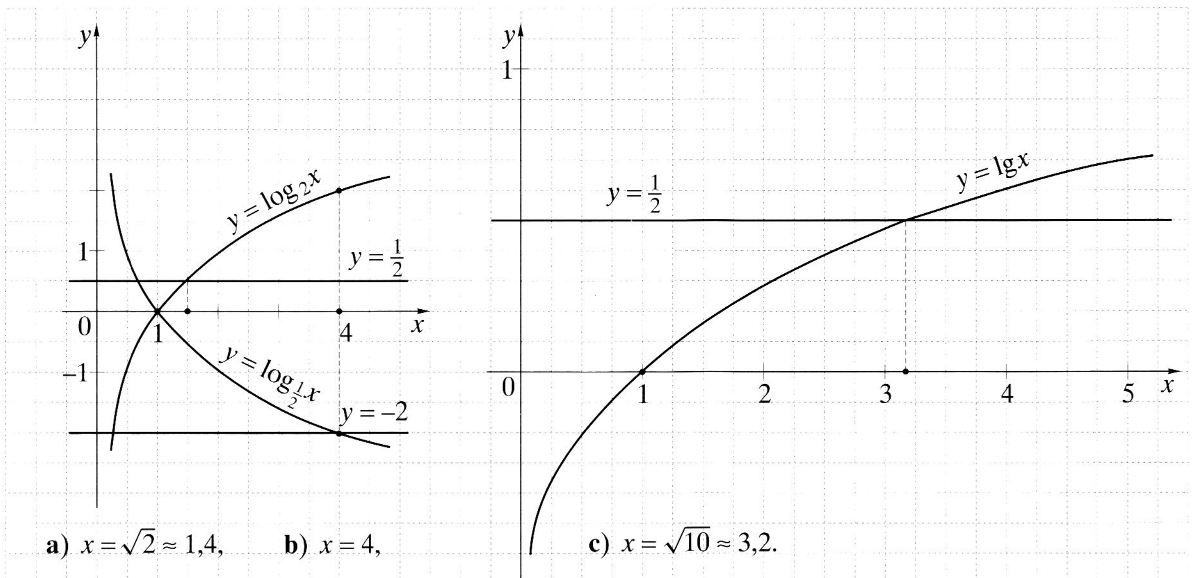
26. **a)** 16, 2, 4, 1, $\frac{1}{16}$; **b)** 126, 3, $1\frac{4}{5}$; **c)** $\frac{1}{4}$, 4, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\sqrt{2}$;
d) -3 ir 1, sprendinių nėra; **e)** 1, 1, ± 1, -1.

27. **a)** ± 1, 4; **b)** 1; **c)** 2; **d)** $\sqrt{5}$.

28. **1,2)** **a)** Lygties $\log_2 x = 1$ sprendinys $x = 2$;
b) lygties $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$ sprendinys $x = \frac{1}{4}$.

3) Lygtis $\log_a x = b$ visada turės vienintelį sprendinį, nes logaritminės funkcijos reikšmės gali būti bet koks skaičius. Logaritminės funkcijos grafiką tiesė $y = b$ kerta tik viename taške.

29. Braižant $y = \lg x$ patarkite mokiniams y ašyje vienetinę atkarpą imti lygią 10 langelių ilgio, o x ašyje — 5 langelių.



30. **a)** Pasižymime $\log_3 x = y$, tai $\log_3^2 x = y^2$;
$y^2 - 3y + 2 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$.
Kai $y = 2$, $\log_3 x = 2$, $x = 3^2$, $x = 9$.
Kai $y = 1$, $\log_3 x = 1$, $x = 3^1$, $x = 3$.

Patikrinimas:
$(\log_3 9)^2 - 3\log_3 9 + 2 = 0$, $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$;
$(\log_3 3)^2 - 3\log_3 3 + 2 = 0$, $1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.

b) Pasižymime $\log_2 x = y$, tai $\log_2^2 x = y^2$;
$y^2 - 2x - 8 = 0$, $y_1 = 4$, $y_2 = 2$.
Kai $y = 4$, $\log_2 x = 4$, $x = 2^4$, $x = 16$.
Kai $y = -2$, $\log_2 x = -2$, $x = 2^{-2}$, $x = \frac{1}{4}$.

Patikrinimas:
$(\log_2 16)^2 - 2\log_2 16 - 8 = 0$, $4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = 0$;
$(\log_2 \frac{1}{4})^2 - 2\log_2 \frac{1}{4} - 8 = 0$, $(-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 8 = 0$.

Priminkite mokiniams
$\log_3^2 x = \log_3 x \cdot \log_3 x$, t. y.
$\log_3^2 x = (\log_3 x)^2$.

c) Pasižymime $\lg x = y$, tai $\lg^2 x = y^2$;
$y^2 = 10y$, $y = 0$, $y = 10$.
Kai $y = 0$, $\lg x = 0$, $x = 1$.
Kai $y = 10$, $\lg x = 10$, $x = 10^{10}$.

Patikrinimas:
$(\lg 1)^2 = 10 \cdot \lg 1$, $0^2 = 10 \cdot 0$;
$(\lg 10^1 0)^2 = 10 \cdot \lg 10^{10}$, $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$.
Atsakymai. **a)** 3, 9; **b)** $\frac{1}{4}$, 16; **c)** 1, 10.

31. **b)** $\log_{x+1} 25 = 2$, $(x+1)^2 = 25$, $x+1 = 5$ ($x+1 = -5$ netinka, nes logaritmo pagrindas turi būti teigiamas), $x = 4$;
$\log_{x+1} 5 = \frac{1}{2}$, $\sqrt{x+1} = 5$, $x+1 = 25$, $x = 24$, mintinai patikriname, ar $x + 1 > 0$ ir $x + 1 \neq 1$;
$\log_{x+1} 25 = -2$, $(x+1)^{-2} = 25$, $\frac{1}{(x+1)^2} = 25$, $(x+1)^2 = \frac{1}{25} \mid \uparrow^{-\frac{1}{2}}$;
$x + 1 = \frac{1}{5}$, $x = -\frac{4}{5}$ ($x + 1 > 0$ ir $x + 1 \neq 1$);
$\log_{x+1} 5 = -1$, $(x+1)^{-1} = 5$, $x + 1 = \frac{1}{5}$ ($x > -1$ ir $x \neq 0$).
c) $\log_{x^2} 1 = 2$, $x^4 = 1$, $x = \pm 1$, nei viena reikšmė netinka, nes logaritmo pagrindas negali būti lygus 1, sprendinių nėra;
$\log_{x^2} 1 = -2$; $\frac{1}{x^4} = 1$, taip pat sprendinių nėra;
$\log_{x^2} 1 = 1$, $(x^2)^1 = 1$, logaritmo pagrindas $x^2 \neq 1$, sprendinių nėra.
$\log_{x^2} 1 = 0$; $(x^2)^0 = 1$, kai $x \neq 0$; $1 = 1$. Bet koks skaičius, išskyrus 0, nuliniu laipsniu lygus 1, tik $x \neq \pm 1$.
Atsakymai. **a)** 3, $\frac{1}{3}$, 81, $\frac{1}{81}$; **b)** 24, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{4}{5}$; **c)** sprendinių nėra, sprendinių nėra, sprendinių nėra, $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$;
d) 5, $\frac{1}{5}$, $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, sprendinių nėra.

32. **c)** Pagal logaritmo apibrėžimą $2x^2 + 5x - 2 = (0{,}1 - x)^0$.
$2x^2 + 5x - 2 = 1$, $x_1 = -3$, $x_2 = 0{,}5$;
$2x^2 + 5x - 2 > 0$, $0{,}1 - x > 0$, $0{,}1 - x \neq 0$, $x \neq 0{,}1$.
Patikrinimas:
$\log_{0,1-(-3)}(2 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) - 2) = 0$;
$\log_{3,1}(18 - 15 - 2) = \log_{3,1} 1 = 0$.
$\log_{0,1-0,5}(2 \cdot 0{,}5^2 + 5 \cdot 0{,}5 - 2) = 0$, kadangi $0{,}1 - 0{,}5 < 0$, tai $x = 0{,}5$ nėra pradinės lygties sprendinys.
Atsakymai. **a)** 5; **b)** $-\frac{1}{4}$; **c)** -3.

Norėdami spręsti paprasčiausias logaritmines nelygybes mokiniai turėtų:

- *prisiminti* nelygybių sistemų sprendimą;
- *žinoti*, kad pologaritminis reiškinys turi būti teigiamas;
- *suprasti* grafinio logaritminių nelygybių sprendimo prasmę;
- *mokėti* logaritminę nelygybę $\log_a f(x) * b$ (čia $*$ reiškia $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$) pakeisti atitinkama nelygybe $\log_a f(x) * \log_a a^b$;
- *suvokti*, kodėl keisdami nelygybę $\log_a f(x) * \log_a b$ nelygybe $f(x) * b$, jos ženklo nekeičiame, kai $a > 1$, ir kodėl keičiame, kai $0 < a < 1$;
- *mokėti* iš nelygybės $\log_a f(x) > \log_a b$ sudaryti nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} f(x) > b, \\ f(x) > 0, \quad \text{kai } a > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) < b, \\ f(x) > 0, \quad \text{kai } 0 < a < 1. \end{cases}$$

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 33, 34, 35a,b, 37.
Vidutinis lygmuo: 35c.
Aukštesnysis lygmuo: 35d.

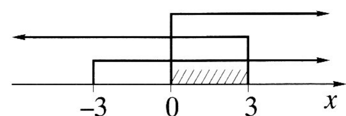
33. Kai $a > 1$, logaritminė funkcija $y = \log_a x$ yra didėjančioji ir didesnę argumento reikšmę atitinka didesnė funkcijos reikšmė. Kai $0 < a < 1$, logaritminė funkcija $y = \log_a x$ yra mažėjančioji ir didesnę argumento reikšmę atitinka mažesnė funkcijos reikšmė.

Atsakymai. **a)** $\log_2 8 < \log_2 64$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$; **b)** $\log_8 8 < \log_8 64$, $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{8} < \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{64}$; **c)** $\log_{0,1} 15 > \log_{0,1} 16$, $\lg 0{,}2 < \lg 0{,}3$.

34. **a)** **C**; **b)** **D**; **c)** **B**; **d)** **D**.

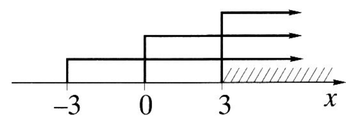
35. **c)** $\log_5(x+3) > \log_5(2x)$:

$$\begin{cases} x+3 > 2x, \\ x+3 > 0, \\ 2x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x > -3, \\ x > 0; \end{cases}$$



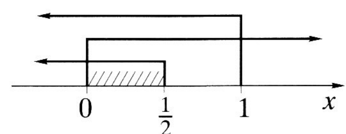
$\log_{\frac{1}{3}}(x+3) > \log_{\frac{1}{3}}(2x)$:

$$\begin{cases} x+3 < 2x, \\ x+3 > 0, \\ 2x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x > -3, \\ x > 0; \end{cases}$$



$\lg x < \lg(1-x)$:

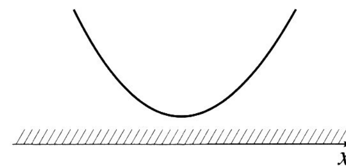
$$\begin{cases} x < 1-x, \\ x > 0, \\ 1-x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x > 0, \\ x < 1. \end{cases}$$



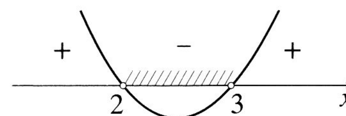
d)

1) $\lg(x^2 - 5x + 7) < 0$: $\quad \lg(x^2 - 5x + 7) < \lg 1$:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 7 < 1, \\ x^2 - 5x + 7 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0, \\ x^2 - 5x + 7 > 0. \end{cases}$$



Sprendžiame nelygybę $x^2 - 5x + 7 > 0$.
$x^2 - 5x + 7 = 0$, $D = 25 - 28 < 0$.
Parabolė $y = x^2 - 5x + 7$ nekerta x ašies, jos reikšmės teigiamos, $x \in R$ (t. y. x — bet koks realus skaičius).
Sprendžiame nelygybę $x^2 - 5x + 6 < 0$.
$x^2 - 5x + 6 = 0$, $x = 2$, $x = 3$. Parabolės šakos eina į viršų, parabolė kerta x ašį taškuose 2 ir 3.
Taigi sistemos sprendinys yra $x \in (2; 3)$.



2) $\lg(x^2 - 5x + 7) \geqslant 0$, $\lg(x^2 - 5x + 7) \geqslant \lg 1$,

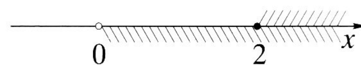
$$\begin{cases} \lg(x^2 - 5x + 7) \geqslant 1, \\ \lg(x^2 - 5x + 7) > 0. \end{cases}$$

Toms kintamojo reikšmėms, su kuriomis (1) nelygybė teisinga, teisinga ir (2) nelygybė, todėl galima spręsti tik (1).

Iš parabolės $y = x^2 - 5x + 6$ grafiko eskizo matome, kad $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$, kai $x \in (-\infty; 2] \cup [3; \infty)$.

Atsakymai. **a)** $(16; +\infty)$, $(0; 16)$, $(0; 16]$, $\left[\frac{1}{16}; +\infty\right)$; **b)** $(0; 16)$, $[4; +\infty)$, $(4; +\infty)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right]$; **c)** $(0; 3)$, $(3; +\infty)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; **d)** $(2; 3)$, $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

36. **a)** **1)** Logaritminės funkcijos $y = \log_2 x$ grafikas, kai $x \in [2; +\infty)$, yra aukščiau tiesės $y = 1$, tai spręsta nelygybė $\log_2 x \geqslant 1$;

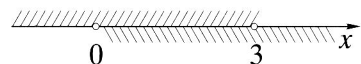


2) $\log_2 x = 1$, $\log_2 x = \log_2 2$, $x \geqslant 2$, $x > 0$, taigi $x \in [2; +\infty)$;

3) Nelygybė $\log_a x > b$ visada turės sprendinių, nes logaritminė funkcija įgyja reikšmes nuo $-\infty$ iki $+\infty$ ir gali būti didesnė už bet kokią b reikšmę.

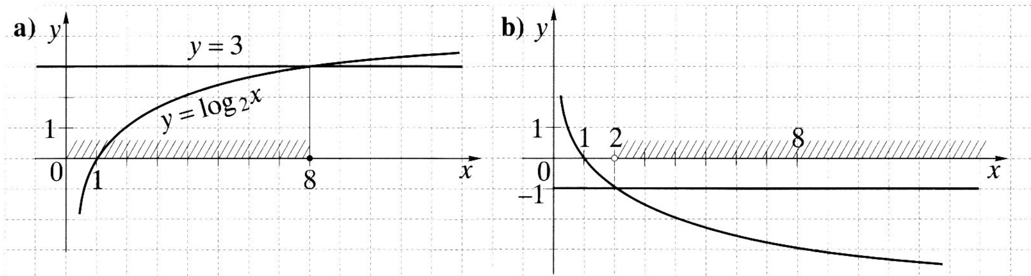
b) **1)** Logaritminės funkcijos $y = \log_3 x$ grafikas, kai $x \in (-\infty; 3)$, yra žemiau tiesės $y = 1$, tai spręsta nelygybė $\log_3 x < 1$;

2) $\log_3 x < 1$, $\log_3 x < \log_3 3$, $x < 3$ ir $x > 0$;



3) Nelygybė $\log_a x < b$ visada turi sprendinių, nes logaritminė funkcija įgyja reikšmes nuo $-\infty$ iki $+\infty$ ir gali būti mažesnė už bet kokią b reikšmę.

37.



Atsakymai. **a)** $0 < x \leqslant 8$; **b)** $x > 2$.

8.5. Geometrijos uždaviniai

Sprendžiant šio skyrelio uždavinius mokiniams reikia prisiminti ritinio, kūgio, rutulio tūrio ir paviršiaus ploto skaičiavimo formules, o 39 uždaviniui išspręsti reiktų pateikti ir nupjautinio kūgio tūrio bei paviršiaus ploto radimo formules:

$V = \frac{1}{3}\pi H \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$; $S_{\text{šoninis}} = \pi l \cdot (R + r)$.

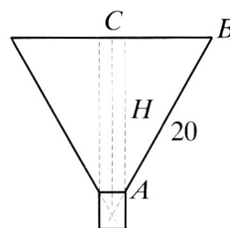
čia R — apatinio kūgio pagrindo spindulys, r — viršutinio kūgio pagrindo spindulys, H — kūgio aukštinė, l — kūgio sudaromoji.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 38.
Aukštesnysis lygmuo: 39.

38. **a)** Vaflio paviršiaus plotas lygus kūgio šoninio paviršiaus plotui:
$S_{\text{šon.}} = \pi r l$, $l = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}$ (cm),
$S_{\text{šon.}} \approx 3{,}14 \cdot 4 \cdot \sqrt{116} \approx 135{,}3$ (cm^2);
b) Ledų tūris lygus kūgio ir pusrutulio tūrių sumai:
$V_{\text{ledų}} = \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$,
$V_{\text{ledų}} \approx \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 10 + \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^3 \approx 167{,}5 + 134{,}0 \approx 301{,}5\,(\text{cm}^3)$.
Atsakymai. **a)** 135,3 cm^2; **b)** 301,5 cm^3.

39. Piltuvėlis yra sudarytas iš nupjautinio kūgio ir ritinio.
a) Skaičiuojame šoninio paviršiaus plotą: $S = S_{\text{kūgio}} + S_{\text{ritinio}}$,
$S = \pi \cdot 20(10{,}5 + 0{,}5) + \pi \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2$;
$S = 3{,}14 \cdot 4 \cdot (55 + 0{,}25) = 697{,}08 \approx 697{,}1\,(\text{cm}^2)$.
b) Nupjautinio kūgio aukštinę randame iš $\triangle ABC$:
$H^2 + BC^2 = AB^2$, $H^2 = 20^2 - (10{,}5 - 0{,}5)^2$, $H \approx 17{,}32$ cm.
Skaičiuojame tūrius: $V = V_{\text{kūgio}} + V_{\text{ritinio}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 17{,}32 \cdot (10{,}5^2 + 10{,}5 \cdot 05 + {}$
$+ 0{,}5^2) + \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 2 \approx 2099{,}91 = 2100\,\text{cm}^3 = 2100\,\text{m}\ell$.



Atsakymas. Skardos reikės ne mažiau kaip 698 cm^2, piltuvėlio tūris 2100 mℓ.

9. TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

9.1. Posūkio kampai

Nagrinėdami konkrečius pavyzdžius, mokiniai turėtų:

- *išsiaiškinti*, kokie kampai vadinami posūkio kampais;
- *žinoti*, kurie posūkio kampai teigiamieji, kurie neigiamieji;
- kaip kampai susieti su koordinačių plokštuma, *mokėti nustatyti*, kurio ketvirčio yra posūkio kampas.

Posūkio kampams apskaičiuoti reikia prisiminti stačiojo trikampio smailiųjų kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 52–54, 56–58.
Vidutinis lygmuo: 55, 59.

52. Minutinė rodyklė per 1 h = 60 min. pasisuka 360° kampu, tai per 1 min. pasisuks 360° : 60 = 6° kampu.
Valandinė rodyklė per 12 h = 720 min. pasisuka 360° kampu, tai per 1 min. pasisuks 360° : 720 = 0,5° kampu.
Nuo to, kiek rodo laikrodis, posūkio kampas nepriklauso, nes per vienodus laiko tarpus rodyklės pasisuka tuo pačiu kampu.

Atsakymai.

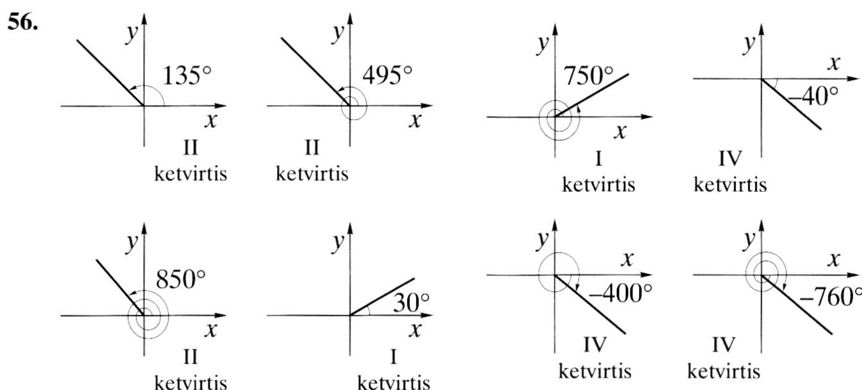
	Minutinė rodyklė		Valandinė rodyklė
a)	$-30\cdot 6=-180°$,	**a)**	$-30\cdot 0{,}5=-15°$,
b)	$15\cdot 6=90°$,	**b)**	$15\cdot 0{,}5=7{,}5°$,
c)	$-60\cdot 6=-360°$,	**c)**	$-60\cdot 0{,}5=-30°$,
d)	$70\cdot 6=420°$.	**d)**	$70\cdot 0{,}5=35°$.

53. **a)** Stipinas sukasi pagal laikrodžio rodyklę, tai posūkio kampas neigiamas: $-5\cdot 360=-1800°$; **b)** Veržliaraktis sukasi prieš laikrodžio rodyklę, tai posūkio kampas teigiamas: $2{,}5\cdot 360=+900°$; **c)** Sraigtasparnio sraigtas per sekundę apsisuks $420:60=7$ kartus, posūkio kampas neigiamas: $-7\cdot 360=-2520°$.

54. **a)** $\alpha=225°$; **b)** $\beta=-3\cdot 90°=-270°$; **c)** $\gamma=405°$; **d)** $\delta=-180°$; **e)** $\psi=3\cdot 360°-45°=1035°$; **f)** $\mu=-4\cdot 360°=-1440°$.

55. **a)** $\alpha=30°$; **b)** $\beta=30°-2\cdot 360°=-690°$; **c)** $\angle BOC=30°$, $\gamma=180°-30°+360°=510°$; **d)** $\delta=45°$; **e)** $\psi=-2\cdot 360°+45°=-675°$; **f)** $\sin\angle BOC=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle BOC=45°$, $\mu=180°+45°+360°=585°$.

56.



57. I ketvirčio kampai: β, ρ, $-\gamma$; $-\delta$; II ketvirčio: α; III ketvirčio: $-\alpha$; IV ketvirčio: γ, δ, $-\beta$, $-\rho$.

58. **a)** Jei spindulį OA_1 pasuksime 20° kampu, tai naujasis kampas $\beta=260°+20°=280°$, $270°<\beta<360°$, t. y. taškas A_1 atsidurs IV ketvirtyje; **b)** $\beta=260°+70°=330°$ (IV ketvirtis);
c) $\beta=260°+150°=360°+50°$ (I ketvirtis); **d)** $\beta=260°-50°=210°$ (III ketvirtis); **e)** $\beta=160°$ (II ketvirtis); **f)** $\beta=260°-500°=-240°$, $\beta=-240°+360°=120°$ (II ketvirtis); **g)** $\beta=4\cdot 360°+160°$ (II ketvirtis); **h)** $\beta=-1080°=3\cdot(-360°)+0°$ (I ketvirtis).

59. **a)** III; **b)** IV; **c)** I; **d)** II; **e)** I; **f)** IV; **g)** III; **h)** II.

9.2. Kampų matavimas laipsniais ir radianais

Mokiniai turėtų:

- *žinoti*, kokio centrinio kampo dydis lygus 1 radianui;
- *mokėti* apskaičiuoti kampo didumą radianais, žinant jo didumą laipsniais ir atvirkščiai;
- *suvokti*, kad kiekvieną skaičių atitinka posūkio kampas ir atvirkščiai — kiekvieną posūkio kampą atitinka skaičius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 60, 62–64, 67.
Vidutinis lygmuo: 61, 65, 66.

60. Viso apskritimo lanko ilgis $2\pi r$, 1° apskritimo lanko ilgis $\frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{\pi r}{180^\circ}$.
Atsakymai **a)** $\frac{\pi \cdot 1}{180^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}5\,\text{cm}$; **b)** $\frac{\pi \cdot 1}{180^\circ} \cdot 45^\circ = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}8\,\text{cm}$;
c) $\frac{\pi \cdot 1}{180^\circ} \cdot 60^\circ = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}0\,\text{cm}$; **d)** $\frac{\pi \cdot 1}{180^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}6\,\text{cm}$;
e) $\frac{\pi \cdot 2}{180^\circ} \cdot 120^\circ = \frac{\pi}{3} \cdot 2 \approx 4{,}2\,\text{cm}$; **f)** $\frac{\pi \cdot 2}{180^\circ} \cdot 135^\circ = \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7\,\text{cm}$;
g) $\frac{\pi \cdot 2}{180^\circ} \cdot 150^\circ = \frac{5\pi}{3} \approx 5{,}2\,\text{cm}$; **h)** $\frac{\pi \cdot 2}{180^\circ} \cdot 180^\circ = 2\pi \approx 6{,}2\,\text{cm}$;
i) $\frac{\pi \cdot 3}{180^\circ} \cdot 210^\circ = \frac{7\pi}{2} \approx 11{,}0\,\text{cm}$; **j)** $\frac{\pi \cdot 3}{180^\circ} \cdot 225^\circ = \frac{15\pi}{4} \approx 11{,}8\,\text{cm}$;
k) $\frac{\pi \cdot 3}{180^\circ} \cdot 240^\circ = 4\pi \approx 12{,}6\,\text{cm}$; **l)** $\frac{\pi \cdot 3}{180^\circ} \cdot 270^\circ = \frac{9\pi}{2} \approx 14{,}1\,\text{cm}$;
m) $\frac{5\pi}{3} \cdot 4 \approx 20{,}9\,\text{cm}$; **n)** $\frac{7\pi}{4} \cdot 5 \approx 27{,}5\,\text{mm}$;
o) $\frac{11\pi}{6} \cdot 6 \approx 34{,}5\,\text{mm}$; **p)** $2\pi \cdot 7 \approx 44{,}0\,\text{mm}$.

61. **1)** Galinio rato ilgis $l_A = 40\pi \approx 130\,\text{cm}$, priekinio rato — $l_B = 80\pi \approx 250\,\text{cm}$.
2) Ratas pasisuko 90°, tai sudaro $\frac{1}{4}$ viso galinio rato apskritimo lanko l_A ilgio. Motociklas nuvažiavo $125{,}6 \cdot \frac{1}{4} \approx 30\,(\text{cm})$.
3) $31{,}4\,\text{cm}$ yra $31{,}4 : 251{,}2 = \frac{1}{8}$ didesniojo rato ilgio dalis, tai posūkio kampas taip pat yra $\frac{1}{8}$ viso pilnutinio posūkio kampo dalis: $360^\circ \cdot \frac{1}{8} = 45^\circ$.
Atsakymai. **1)** 130 cm, 250 cm; **2)** 30 cm; **3)** 45°.

62. **a)** $\frac{\pi}{6}$ rad; **b)** $\frac{\pi}{4}$ rad; **c)** $\frac{\pi}{2}$ rad; **d)** $\frac{\pi}{3}$ rad; **e)** $\frac{2\pi}{3}$ rad; **f)** π rad;
g) $\frac{3\pi}{4}$ rad; **h)** $\frac{5\pi}{6}$ rad; **i)** $\frac{3\pi}{2}$ rad; **j)** $\frac{7\pi}{6}$ rad; **k)** $\frac{5\pi}{4}$ rad; **l)** 2π rad.

63. **a)** 360°, 2π rad; **b)** $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad, $2^\circ = \frac{\pi}{90}$ rad, $3^\circ = \frac{\pi}{60}$ rad;
c) $1\,\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$, $2\,\text{rad} = \frac{360^\circ}{\pi}$, $3\,\text{rad} = \frac{540^\circ}{\pi}$.

64.

Laipsniai	0°	1°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	210°	225°
Radianai	0	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$

Laipsniai	240°	270°	300°	315°	330°	360°	390°	405°	420°	450°
Radianai	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$

65. Pasinaudojame tuo, kad ratui apsisukus vieną kartą bet kuris rato taškas nueis kelią lygų apskritimo ilgiui.
Atsakymai. **1)** $s_A = 40\pi$, 80π cm, 120π cm; $s_B = 60\pi$ cm, 120π cm, 180π cm;
$s_C = 80\pi$ cm, 160π cm, 240 cm;
2) **a)** $s_V = 80\pi$ cm; **b)** 160π cm; **c)** 240π cm;
3) 80π cm; **4)** 72°;
5) Musės kelias $s = AO + OB + BD + (2\pi OC) : 5)$, $s = 60 + 16\pi$ (cm);
$s = AE + (2\pi OC) : 5 + (2\pi OC) : 5 = AE + (4\pi OC) : 5$, $s = 20 + 32\pi$.

66. **1)** 6,28 cm; **2)** **a)** 1,57 cm; **b)** 3,14 cm; **c)** 1,57 cm;
3) **a)** 1,57 rad; **b)** 3,14 rad, 4,71 rad, 6,28 rad;
4) **a)** 1,05 cm; **b)** I ketvirtyje, II ketvirtyje, III ketvirtyje, IV ketvirtyje;
c) 45°, 120°, 150°, 315°; **d)** Kai apskritimo spindulys lygus 1, centinio kampo didumas radianais lygus lanko ilgiui. Tai ir bus taško nueitas kelias: $\frac{\pi}{4}$ cm, $\frac{2\pi}{3}$ cm, $\frac{5\pi}{6}$ cm, $\frac{7\pi}{4}$ cm.

67. **a)** 0, $\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{90}$, $\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{6}$;
b) 0°, 60°, 90°, $\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ$, $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$, 114°; 171°.

9.3. Kampo sinusas. Funkcija $f(x) = \sin x$

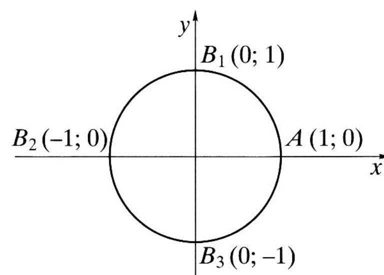
Prieš apibrėžiant bet kokio kampo sinusą reiktų pakartoti taškų, išsidėsčiusių įvairiuose koordinačių plokštumos ketvirčiuose ženklus, panagrinėti, kaip kinta taško, judančio vienetiniu apskritimu koordinatės.
Suformulavus bet kokio kampo sinuso apibrėžimą, reiktų išspręsti tekste pateiktas užduotis ir 68 uždavinį.
Išnagrinėję funkcijos $f(x) = \sin x$ savybes mokiniai turėtų:

- *žinoti* funkcijos $f(x) = \sin x$ apibrėžimo ir reikšmių sritis;
- *gebėti* nustatyti funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus;
- pasinaudodami žinomomis funkcijos $f(x) = \sin x$ reikšmėmis ir jos periodiškumu, *nubrėžti* sinusoidę.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 68.1a,d,e,h, 68.2, 69, 70, 73.
Vidutinis lygmuo: 68.1b,c,f,g, 74–76.
Aukštesnysis lygmuo: 71.

68. 1) Pratimus a), d), e), h) galima išspręsti mintinai nusibrėžus brėžinį ir užsirašius taškų A, B_1, B_2, B_3 koordinates. Šių taškų ordinatės lygios atitinkamų posūkio kampų sinusams.
Pratimuose b), c), f), g) sinusus apskaičiuojame iš stačiųjų trikampių, naudodamiesi Pitagoro teorema ir statinio, esančio prieš 30° (arba 45°) kampą, savybe, kaip tai parodyta vadovėlio 42 p. pateiktame uždavinio sprendime.



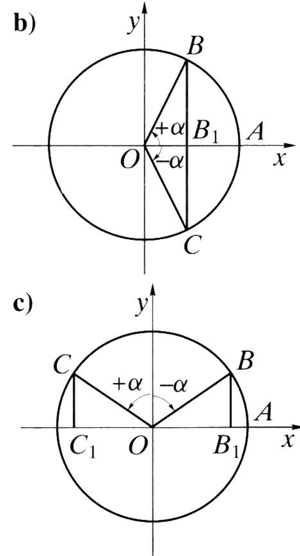
Visų kampų sinusai lygūs: **a)** 0; **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **d)** 1; **e)** 0; **f)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **g)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **h)** -1.
2) Šiuo punktu norėta parodyti, kad kampų α ir $\alpha + 360° \cdot k$ sinusai yra lygūs. Gautos lygybės yra susijusios su 1) punkto lygybėmis (nurodytomis skliaustuose):
$\sin(360° \cdot k) = \sin 0° = 0$ (**1a**), $\sin(45° + 360° \cdot k) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (**1b**),
$\sin(60°+360° \cdot k) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (**1c**), $\sin(90° + 360° \cdot k) = \sin 90° = 1$ (**1d**),
$\sin(180°+360° \cdot k) = \sin 180° = 0$ (**1e**), $\sin(135° + 360° \cdot k) = \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (**1f**),
$\sin(120°+360° \cdot k) = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (**1g**), $\sin(270° + 360° \cdot k) = \sin 270° = -1$ (**1h**),
$\sin(30° + 360° \cdot k) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ (ši lygybė **1)** punkte nėra nagrinėjama).

69. **2) f)** Kampai $-15°$ ir $-16°$ yra IV ketvirčio, $\sin x$ reikšmės IV ketvirtyje didėja, tai $\sin(-15°) > \sin(-16°)$, nes $-15° > -16°$;
h) Kampai $-185°$ ir $-200°$ yra II ketvirčio kampai, $\sin x$ reikšmės II ketvirtyje mažėja, tai $\sin(-200°) > \sin(-185°)$, nes $-185° > -200°$;
k) $\sin 1253° = \sin(3 \cdot 360° + 173°) = \sin 173°$, $\sin 1255° = \sin(3 \cdot 360° + 175°) = \sin 175°$, kampai yra II ketvirčio, $\sin x$ reikšmės II ketvirtyje mažėja, tai $\sin 173° > \sin 175°$ ir $\sin 1253° > \sin 1255°$.
l) $\sin(-1253°) = \sin(-4 \cdot 360° + 187°) = \sin 187°$, $\sin(-1255°) = \sin(-4 \cdot 360° + 185°) = \sin 185°$, kampai yra III ketvirčio, $\sin x$ reikšmės III ketvirtyje mažėja, tai $\sin 187° > \sin 185°$ ir $\sin(-1253°) > \sin(-1255°)$.
Atsakymai. **1) a)** Kampo reikšmėms *didėjant* nuo 0° iki 90°, tų kampų sinusai, t. y. $\sin x$ reikšmės *didėja nuo* 0 *iki* 1;
b) Kampo reikšmėms *didėjant* nuo 90° iki 180°, $\sin x$ reikšmės *mažėja nuo* 1 *iki* 0;
c) Kampo reikšmėms *didėjant* nuo 180° iki 270°, $\sin x$ reikšmės *mažėja nuo* 0 *iki* -1;
d) Kampo reikšmėms *didėjant* nuo 270° iki 360°, $\sin x$ reikšmės *didėja nuo* -1 *iki* 0.
2) a) $\sin 1° < \sin 2°$; **b)** $\sin 88° < \sin 89°$; **c)** $\sin 90° > \sin 91°$;
d) $\sin 185° > \sin 209°$; **e)** $\sin 301° < \sin 310°$; **f)** $\sin(-15°) > \sin(-16°)$;
g) $\sin(-95°) > \sin(-90°)$; **h)** $\sin(-200°) > \sin(-185°)$;
i) $\sin(-273°) > \sin(-360°)$; **j)** $\sin 585° > \sin 600°$;
k) $\sin 1253° > \sin 1255°$; **l)** $\sin(-1253°) > \sin(-1255°)$.

70. **1)** II ketvirčio taškų ordinatės yra teigiamos, tai $\sin\alpha > 0$, kai α yra II ketvirčio kampas;
III ir IV ketvirčių taškų ordinatės yra neigiamos, tai $\sin\alpha < 0$, kai α yra III ir IV ketvirčio kampai;
2) $\sin\alpha > 0$; **3)** $\sin\alpha < 0$.

71. **5) b)** Parodysime, kad $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$, nors kartais naudingesnis toks lygybės pavidalas: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
$\triangle OBB_1 = \triangle OCB_1$, nes abu trikampiai statieji, $\angle BOB_1 = \angle COB_1 = \alpha$, $OB = OC = 1$. Iš čia $BB_1 = CB_1$.
Taškų B ir C, į kurios perėjo taškas A spindulį OA pasukus atitinkamai kampu α ir $-\alpha$, ordinačių moduliai (ilgiai) lygūs, skiriasi tik ženklai: $y_C = -y_B$, tai $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
c) Parodysime, kad $\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$. Pasižymėsime kampus $\triangle BOA = 90^\circ - \alpha$ ir $\angle COA = 90^\circ + \alpha$. Iš taškų B ir C brėžiame statmenis BB_1 ir CC_1 į x ašį.
$\triangle B_1BO = \triangle C_1CO$ nes trikampiai statūs, $\angle BOB_1 = \angle COC_1 = 90^\circ - \alpha$, $OB = OC = 1$. Iš čia $BB_1 = CC_1$.
Taškų B ir C, į kurios perėjo A, spindulį OA pasukus atitinkamai kampais $\angle BOA = 90^\circ - \alpha$ ir $\angle COA = 90^\circ + \alpha$, ordinatės lygios, tai ir tų kampų sinusai yra lygūs: $\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$.
Kitas lygybes įrodome panašiai, pasinaudodami stačiųjų trikampių lygumu.
1) Pasinaudojame įrodytomis 5) lygybėmis.
$\sin(-1^\circ) = -\sin 1^\circ = -0{,}017$, $\sin 179^\circ = \sin(180^\circ - 1^\circ) = \sin 1^\circ = 0{,}017$, $\sin(-179^\circ) = -\sin 179^\circ = -0{,}017$;
2) $\sin(-94^\circ) = -\sin 94^\circ = -0{,}998$, $\sin 86^\circ = \sin(180^\circ - 94^\circ) = \sin 94^\circ = 0{,}998$, $\sin(-86^\circ) = -\sin 86^\circ = -0{,}998$;
3) $\sin(-195^\circ) = -\sin 195^\circ = 0{,}259$, $\sin 165^\circ = \sin(360^\circ + (-195^\circ)) = \sin(-195^\circ) = -0{,}259$, $\sin(-165^\circ) = -\sin 165^\circ = -(-0{,}259) = 0{,}259$;
4) -40°, 40°, -320°, -140°, 140°;
6) a) $\sin 12^\circ = 0{,}208$, $\sin(-12^\circ) = -0{,}208$,
$\sin 168^\circ = \sin(180^\circ - 12^\circ) = \sin 12^\circ = 0{,}208$,
$\sin 192^\circ = \sin(180^\circ + 12^\circ) = -\sin 12^\circ = -0{,}208$,
$\sin 348^\circ = \sin(360^\circ + (-12^\circ)) = \sin(-12^\circ) = -0{,}208$;
b) $\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) = \sin 80 = 0{,}985$,
$\sin 260^\circ = \sin(360^\circ + (-100^\circ)) = \sin(-100^\circ) = -0{,}985$,
$\sin 280^\circ = \sin(360^\circ - 80^\circ) = -\sin 80^\circ = -0{,}985$,
$\sin(-280^\circ) = -(-0{,}985) = 0{,}985$.

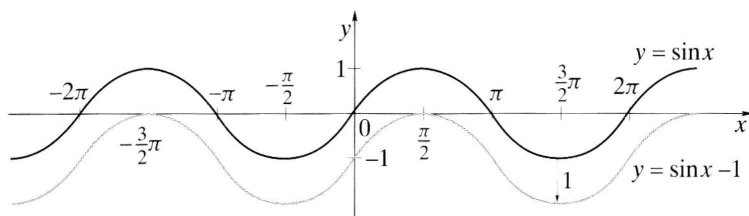
Pastaba
Pravartu įrodyti 5) lygybes prieš sprendžiant kitas užduotis.



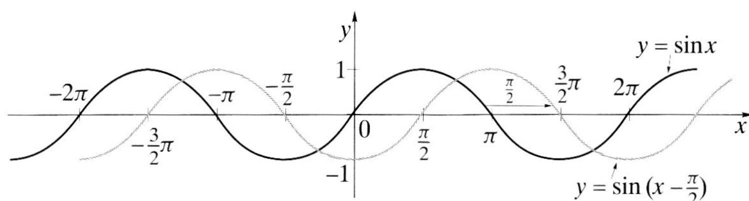
72. **a)** $\sin 0 = \sin 0^\circ = 0$, $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$;
b) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-90^\circ) = -1$;
c) $\sin(-\pi) = 0$, $\sin 2\pi = 0$, $\sin 4\pi = 0$, $\sin(-2\pi) = 0$.

73. **1) a)** Didėjanti, kai $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$;
b) mažėjanti, kai $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.
2) a) $D(f) = R$, $E(f) = [-1; 1]$;
b) $f(x) = 0$, $\sin x = 0$, kai $x = ... -2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi; ...$, $x = \pi k$, $k \in Z$, sinuso reikšmė 0 kartojasi kas π;
c) $f(x) = 1$, $\sin x = 1$, kai $x = ... -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; ...$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in Z$, sinuso reikšmė 1 kartojasi kas 2π;
d) $f(x) = -1$, $\sin x = -1$, kai $x = ... -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; ...$, arba $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, sinuso reikšmė -1 kartojasi kas 2π.
3) Grafikas simetriškas koordinačių pradžios taškui, simetrijos centras (0; 0).
4) Teisinga lygybė $\sin x = -\sin(-x)$.
5) Funkcija $f(x) = \sin x$ yra nelyginė.
6) Funkcija $f(x) = \sin x$ yra periodinė.

74. **a)** Funkcijos $y = \sin x - 1$ visos reikšmės yra 1 mažesnės už atitinkamas funkcijos $y = \sin x$ reikšmes, tai grafiką $y = \sin x - 1$ gausime $y = \sin x$ grafiką pastūmę išilgai y ašies žemyn per 1.



b) Funkcijos $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ reikšmė bus lygi 0, kai $x - \frac{\pi}{2} = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Nulio taškas pasislinks x ašimi į dešinę per $\frac{\pi}{2}$.



75. **b)** Žinome, kad $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Kai $\sin x = -1$, $\sin x - 1 = -1 - 1 = -2$, kai $\sin x = 1$, $\sin x - 1 = 1 - 1 = 0$.
Mažiausia funkcijos reikšmė yra -2, didžiausia — 0.

Atsakymai. **a)** mažiausia 3, didžiausia 5; **b)** mažiausia -2, didžiausia 0; **c)** mažiausia -2, didžiausia 2.

76. **a)** Vandens lygis bus aukščiausias, kai $3\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ įgis didžiausią reikšmę. Kadangi $\sin x$ didžiausia reikšmė lygi 1, tai $\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 1$, kai $\frac{\pi}{6} \cdot t = \frac{\pi}{2}$, $t = 3$.
b) Vandens lygis žemiausias, kai $3\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ įgis mažiausią reikšmę.
Kadangi $\sin x$ mažiausia reikšmė -1, tai $\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = -1$, kai $\frac{\pi}{6} \cdot t = -\frac{\pi}{2}$, $t = -3$, arba, kai $\frac{\pi}{6} \cdot t = \frac{3\pi}{2}$, $t = 9$. Pagal prasmę tinka tik teigiama t reikšmė.
Atsakymas. Vandens lygis aukščiausias po 3 h, žemiausias po 9 h.

Priminkite mokiniams

- Funkcijos $y = \sin x + a$ grafiką gausime $y = \sin x$ grafiką pastūmę išilgai y ašies per a. Jei $a > 0$ — aukštyn, jei $a < 0$ — žemyn.
- Funkcijos $y = \sin(x - a)$ grafiką gausime $y = \sin x$ grafiką pastūmę išilgai x ašies per $-a$. Jei $a > 0$ — į kairę, jei $a < 0$ — į dešinę.

9.4. Kampo kosinusas. Funkcija $f(x) = \cos x$

Bet kokio kampo kosinusas ir funkcija $f(x) = \cos x$ nagrinėjami kaip ir bet kokio kampo sinusas ir funkcija $f(x) = \sin x$. Galima šiuos abu skyrelius nagrinėti kartu, apibrėžiant bet kokio kampo sinusą ir kosinusą, o vėliau ir funkcijas $f(x) = \sin x$ bei $f(x) = \cos x$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 77, 78.1, 79, 82.
Vidutinis lygmuo: 78.2, 81.
Aukštesnysis lygmuo: 80.

77. **1)** Visų kampų kosinusai lygūs:
a) 1; **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** 0; **e)** -1; **f)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **g)** $-\frac{1}{2}$; **h)** 0.
2) $\cos(360° \cdot k) = \cos 0° = 1$, $\cos(45° + 360° \cdot k) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\cos(60° + 360° \cdot k) = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos(90° + 360° \cdot k) = \cos 90° = 0$,
$\cos(180° + 360° \cdot k) = \cos 180° = -1$, $\cos(135° + 360° \cdot k) = \cos 135 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\cos(120° + 360° \cdot k) = \cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\cos(270° + 360° \cdot k) = \cos 270° = 0$,
$\cos(30° + 360° \cdot k) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Patarkite mokiniams
pasinaudoti 68 uždavinyje apskaičiuotomis taškų koordinatėmis ir kosinuso apibrėžimu.

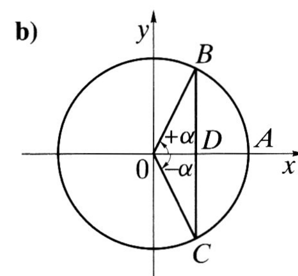
78. **2)** **f)** Kampai $-15°$ ir $-16°$ yra IV ketvirčio, $\cos x$ reikšmės IV ketvirtyje didėja, tai $\cos(-15°) > \cos(-16°)$, nes $-15° > -16°$;
h) Kampai $-185°$ ir $-200°$ yra II ketvirčio kampai, $\cos x$ reikšmės II ketvirtyje mažėja, tai $\cos(-200°) > \cos(-185°)$, nes $-185° > -200°$;
j) $\cos 585° = \cos(360° + 225°) = \cos 225°$, $\cos 600° = \cos(360° + 240°) = \cos 240°$, kampai yra III ketvirčio, $\cos x$ reikšmės III ketvirtyje didėja, tai $\cos 585° < \cos 600°$;
k) $\cos 1253° = \cos(3 \cdot 360° + 173°) = \cos 173°$, $\cos 1255° = \cos(3 \cdot 360° + 175°) = \cos 175°$, kampai yra II ketvirčio, $\cos x$ reikšmės II ketvirtyje mažėja, tai $\cos 173° > \cos 175°$ ir $\cos 1253° > \cos 1255°$.

Atsakymai.
1) **a)** Kampo reikšmėms *didėjant* nuo 0° iki 90°, tų kampų kosinusai, t. y. $\cos x$ reikšmės *mažėja nuo* 1 *iki* 0.
b) Kampo reikšmėms *didėjant* nuo 90° iki 180°, $\cos x$ reikšmės *mažėja nuo* 0 *iki* -1.
c) Kampo reikšmėms *didėjant* nuo 180° iki 270°, $\cos x$ reikšmės *didėja nuo* -1 *iki* 0.
d) Kampo reikšmėms *didėjant* nuo 270° iki 360°, $\cos x$ reikšmės *didėja nuo* 0 *iki* 1.
2) **a)** $\cos 1° > \cos 2°$; **b)** $\cos 89° < \cos 85°$; **c)** $\cos 90° > \cos 91°$;
d) $\cos 185° < \cos 209°$; **e)** $\cos 301° < \cos 310°$; **f)** $\cos(-15°) > \cos(-16°)$;
g) $\cos(-95°) < \cos(-90°)$; **h)** $\cos(-200°) > \cos(-185°)$; **i)** $\cos(-273°) < \cos(-360°)$; **j)** $\cos 585° < \cos 600°$; **k)** $\cos 1253° > \cos 1255°$.

79. Kosinusų ženklai tokie patys kaip ir I, II, III, IV ketvirčių taškų abscisės (koordinatė x).
Atsakymai. **1)** I ir IV ketvirčio kampų kosinusai teigiami, II ir III — neigiami; **2)** $\cos\alpha > 0$; **3)** $\cos\beta < 0$.

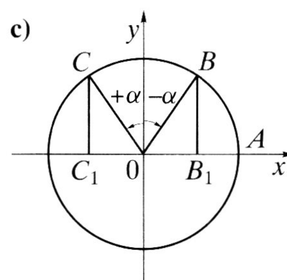
80. **5)** **b)** Įrodome, kad $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.
$\triangle ODB = \triangle ODC$, nes abu trikampiai statūs, $OB = OC$, $\angle BOD = \angle COD$.
Iš trikampių lygybės seka, kad taškų B ir C abscisės lygios: $x_B = x_C$, tai ir $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.
c) Įrodome, kad $\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha)$.
$\triangle B_1OB = \triangle C_1OC$, nes trikampiai statūs, $\angle BOB_1 = \angle COC_1 = 90° - \alpha$, $OB = OC$.
Jei trikampiai lygūs, tai $B_1O = C_1O$. Taškų B ir C abscisių moduliai lygūs, o ženklai priešingi, tai $\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha)$.
Kitos lygybės įrodomos panašiai.
Pasinaudodami įrodytomis lygybėmis, sprendžiame 1)–4) užduotis (analogiškai kaip 71 uždavinyje).

Pastaba
Pravartu įrodyti 5) lygybes prieš sprendžiant kitas užduotis. Tada jomis galima pasinaudoti.



6) a) $\cos 12° = \cos(-12°) = 0{,}978$,
$\cos 168° = \cos(180° - 12°) = -\cos 12° = -0{,}978$,
$\cos 192° = \cos(180° + 12°) = \cos(180° - (-12°)) = -\cos 12° = -0{,}978$,
$\cos 348° = \cos(360° - 12°) = \cos(-12°) = \cos 12° = 0{,}978$;
b) $\cos 100° = \cos(180° - 80°) = -\cos 80° = -0{,}174$,
$\cos 260° = \cos(180° + 80°) = -\cos 80° = -0{,}174$,
$\cos 280° = \cos(-280°) = \cos(360° - 80°) = \cos 80° = 0{,}174$.

c)

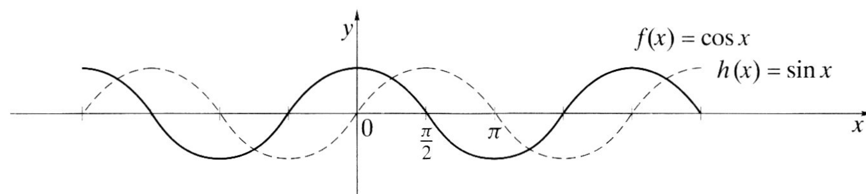


Atsakymai.
1) $\cos(-5°) = 0{,}996$, $\cos 175° = -\cos 5° = -0{,}996$,
$\cos 185° = -\cos 5° = -0{,}996$, $\cos(-175°) = -0{,}996$, $\cos(-185°) = -0{,}996$.
2) $\cos(-89°) = 0{,}017$, $\cos(-91°) = \cos(91°) = 0{,}017$,
$\cos(269°) = -0{,}017$, $\cos(271°) = 0{,}017$.
3) $\cos(190°) = \cos(-190°) = -0{,}985$, $\cos(-10°) = \cos(10°) = 0{,}985$,
$\cos(-170°) = -0{,}985$.
4) $-140°$, $140°$, $-40°$, $40°$, $-320°$.

81. **a)** $\cos 0 = \cos 0° = 1$, $\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$;
b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos(-30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos(-60°) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(-90) = 0$;
c) $\cos(-\pi) = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\sin 4\pi = 1$, $\cos(-2\pi) = 1$.

82. **1) a)** Funkcija mažėjanti, kai $x \in (2k\pi; \pi + 2k\pi)$ $k \in Z$;
b) didėjanti, kai $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$ $k \in Z$.
2) a) $D(f) = R$, $E(f) = [-1; 1]$;
b) $f(x) = 0$, kai $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $k \in Z$; $f(x) = 1$, kai $x = 2k\pi$, $k \in Z$; $f(x) = -1$, kai $x = (2k+1)\pi$, $k \in Z$.
3) Funkcijos grafikas simetriškas ordinačių ašiai, turi simetrijos ašį.
4) Teisinga lygybė: $\cos x = \cos(-x)$.
5) Funkcija $f(x) = \cos x$ yra lyginė.
6) Funkcija $f(x) = \cos x$ yra periodinė.
7) Funkcijų $g(x) = \cos x + 1$, $h(x) = \cos x - 2$ grafikus gausime funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiką pastūmę išilgai y ašies atitinkamai: per 1 vienetą aukštyn; per 2 vienetus žemyn (žr. 74 užd.).
Funkcijų $l(x) = \cos(x - \pi)$, $m(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ grafikus gausime funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiką pastūmę išilgai x ašies atitinkamai: per π į dešinę; per $\frac{\pi}{2}$ į kairę.
Funkcijos $n(x) = \sin x$ grafiką nusibraižę vienoje koordinačių sistemoje su funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiku pastebime, kad $n(x) = \sin x$ grafiką gauname $f(x) = \cos x$ grafiką pastūmę x ašimi per $\frac{\pi}{2}$ į dešinę.

Išvada. $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.



9.5. Kampo tangentas. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$

Bet kokio kampo tangentui apibrėžti taip pat naudojamės vienetiniu apskritimu ir spindulio OA galo taško, pasukus spindulį OA kampu α, koordinatėmis. Braižant funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafiką, tangento reikšmėms apskaičiuoti pravartu pasinaudoti trigonometrinių funkcijų reikšmių lentele arba skaičiuokliu.
Mokiniai turėtų:

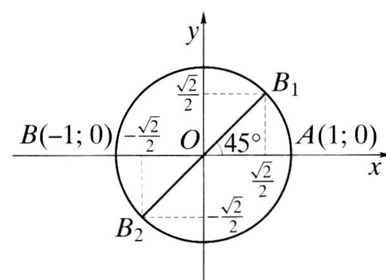
- *žinoti*, kaip apibrėžiamas bet kokio kampo tangentas, kurių kampų tangentai neegzistuoja;
- *mokėti* nustatyti bet kokio kampo tangento ženklą ir rasti tikslias kampų 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; tangentų reikšmes;
- *nubraižyti* funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafiką;
- *nusakyti* funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ apibrėžimo ir reikšmių sritis, teigiamų ir neigiamų funkcijos reikšmių intervalus, funkcijos lyginumą, periodiškumą, grafiko simetriškumą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 83, 84.1, 85, 86.1, 87, 88.
Vidutinis lygmuo: 84.2, 86.2.
Aukštesnysis lygmuo: 89.

83. Žinome, kad $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
Kai $\alpha = ...-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...$ šių kampų kosinusai lygūs 0, o dalyba iš 0 negalima.

84. **1) b)** Spinduliui OA pasisukus 45° kampu, taškas A pereis į tašką B_1, kurio koordinatės lygios $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tai $\operatorname{tg} 45° = 1$. Taip pat ir kitų kampų, kuriuos galime užrašyti pavidalu $45° + 360° \cdot k$, k — sveikasis skaičius, tangentai lygūs 1: $\operatorname{tg}(45° + 360° \cdot k) = 1$, kai $k \in Z$.
Spinduliui pasisukus 225° kampu taškas A pereis į tašką B_2, kurio koordinatės lygios $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Gauname, kad $\operatorname{tg} 225° = 1$ arba $\operatorname{tg}(180° + 45°) = 1$.
Visų kampų, kuriuos galime užrašyti pavidalu $(180° + 45°) + 360° \cdot k$, $k \in Z$, tangentai lygūs 1.
Išvada. $\operatorname{tg}(\alpha + 180 \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha$, k — sveikasis skaičius.



Atsakymai. **1)** Visų kampų tangentai lygūs:
a) 0; **b)** 1; **c)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
2) $\operatorname{tg}(180° \cdot k) = 0$, $\operatorname{tg}(45° + 180° \cdot k) = 1$,
$\operatorname{tg}(120° + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(-60° + 180° + 180° \cdot k) = -\sqrt{3}$,
$\operatorname{tg}(150° + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(-30° + 180° + 180° \cdot k) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\operatorname{tg}(225° + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(45° + 180° + 180° \cdot k) = 1$,
$\operatorname{tg}(300° + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(-60° + 2 \cdot 180° + 180° \cdot k) = -\sqrt{3}$,
$\operatorname{tg}(330° + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(-30° + 2 \cdot 180° + 180° \cdot k) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\operatorname{tg}(30° + 180° \cdot k) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}(60° + 180° \cdot k) = \sqrt{3}$,
$\operatorname{tg}(135° + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(-45° + 180° + 180° \cdot k) = -1$,
$\operatorname{tg}(210° + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(30° + 180° + 180° \cdot k) = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\operatorname{tg}(240° + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(60° + 180° + 180° \cdot k) = \sqrt{3}$,
$\operatorname{tg}(315° + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(-45° + 2 \cdot 180° + 180° \cdot k) = -1$.

85. Kai kampai yra I ir III ketvirčių, taško B koordinatės vienodų ženklų ir $\operatorname{tg}\alpha > 0$, kai kampai yra II ir IV ketvirčių, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, nes taško B koordinatės skirtingų ženklų.

Priminkite mokiniams
Pagal apibrėžimą posūkio kampo α tangentu vadiname taško B, į kurį pereina taškas A, pasukus spindulį OA kampu α, koordinačių santykį $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$. Tangento ženklas priklauso nuo taško B koordinačių ženklų.

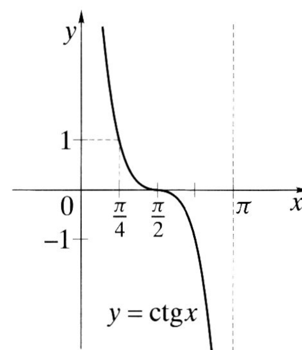
86. **1) a)** Kampo reikšmėms *didėjant* nuo −90° iki 90°, tų kampų tangentai, t. y. $\operatorname{tg} x$ reikšmės *didėja* nuo $-\infty$ iki $+\infty$.
b) Kampo reikšmėms *didėjant* nuo 90° iki 270°, tų kampų tangentai, t. y. $\operatorname{tg} x$ reikšmės *didėja* nuo $-\infty$ iki $+\infty$.
2) a) $\operatorname{tg} 15° < \operatorname{tg} 16°$; **b)** $\operatorname{tg}(-15°) > \operatorname{tg}(-16°)$; **c)** $\operatorname{tg} 89° > \operatorname{tg}(-89°)$;
d) $\operatorname{tg} 121° < \operatorname{tg} 221°$; **e)** $\operatorname{tg}(-100°) > \operatorname{tg} 259°$; **f)** $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(-405°)$.

87. $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

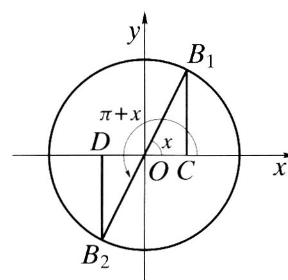
88. **1)** Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$:
a) apibrėžta, kai $x \in \left(\pi \cdot k - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right)$;
b) $E(f) = R$;
c) didėjanti visoje apibrėžimo srityje;
d) $f(x) = 0$, kai $x = \pi \cdot k$, $k \in Z$, $f(x) > 0$, kai $x \in \left(\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right)$, $f(x) < 0$, kai $x \in \left(\pi \cdot k - \frac{\pi}{2}; \pi \cdot k\right)$.

2) Funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafikas:
a) simetriškas koordinačių pradžios taško (0; 0) atžvilgiu; **b)** nesimetriškos;
c) turi simetrijos centrą — taškas $O(0; 0)$.
3) Teisinga lygybė $\operatorname{tg}(x) = -\operatorname{tg}(-x)$.
4) Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ nelyginė.
5) Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ periodinė.

89. **1)** Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ neapibrėžta, kai $\sin x = 0$, t. y. kai $x = \pi \cdot k$.



2) $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 45° = 1$, $\operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 90° = 0$.
Spindulį OA pasukus 120° kampu taškas A pereina į tašką B, kurio koordinatės $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{ctg} 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Spindulį OA pasukus 135° kampu taškas A pereina į tašką B, kurio koordinatės $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\operatorname{ctg} 135° = -1$.
Spindulį OA pasukus 150° kampu taškas A pereina į tašką B, kurio koordinatės $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{ctg} 150 = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$.
Naudojantis tuo, kad $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, galime apskaičiuoti ir taip:
$\operatorname{ctg} 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 45° = \frac{\cos 45°}{\sin 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$;
$\operatorname{ctg} 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = \frac{0}{1} = 0$.
4) $\angle B_2OD = (\pi + x) - \pi = x$,
$\triangle OB_1C = \triangle OB_2D$, nes trikampiai statūs, $\angle B_1OC = \angle B_2OD$, $OB_1 = OB_2$.



Iš trikampių lygybės: $OC = OD$, $OB_1 = OB_2$.
Taškų B_1 ir B_2 koordinatės skiriasi tik ženklu $B_1(x_1; y_1)$, $B_2(-x_1; -y_1)$, tai jų santykiai lygūs:
$\operatorname{ctg} x = \frac{x_1}{y_1} = \frac{-x_1}{-y_1} = \operatorname{ctg}(x + \pi)$.
Kai spindulys OB_2 pasisuks dar per π, taškas B_2 pereis į tašką B_1 ir $\operatorname{ctg}(x + 2 \cdot \pi) = \operatorname{ctg} x$. Spinduliui OB_1 pasisukus k kartų po π, jo galo taškas atsidurs arba tame pačiame taške B_1, arba taške B_2, todėl $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + k \cdot \pi)$, $k \in Z$.

9.6. Geometrijos uždaviniai

Prieš sprendžiant šio skyrelio uždavinius reikėtų, kad mokiniai:

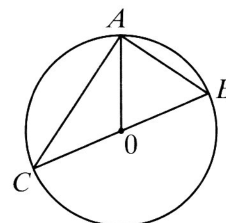
- *prisimintų* centrinių ir įbrėžtinių kampų apibrėžimus ir kam lygus įbrėžtinio kampo didumas;
- *žinotų,* kokie daugiakampiai vadinami apibrėžtaisiais;
- *gebėtų* pasinaudoti tiesiogine ir atvirkštine teoremomis apie apibrėžtąjį keturkampį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 90, 92a.
Vidutinis lygmuo: 91, 92b–d.

90. **a)** 40°; **b)** 172°; **c)** 60°.

91. Galima paaiškinti, kur yra apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo centras: $\angle BAC = 90°$ yra įbrėžtinis, tai jį atitinkantis centrinis kampas $\angle COB = 180°$. Styga CB dalija apskritimo lanką pusiau, tai ji yra to apskritimo skersmuo ir stačiojo trikampio įžambinė. Todėl įžambinės vidurio taškas yra apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo centras O, jis vienodai nutolęs nuo visų trikampio viršūnių: $OA = OB = OC = r$. Ši lygybė reiškia, kad apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys lygus pusei įžambinės, pusiaukraštinė OA taip pat lygi pusei įžambinės.
Atsakymai. **a)** $OA = OB = 3\,\text{cm}$; **b)** $OA = 2{,}5\,\text{cm}$; **c)** $OA = 5\sqrt{2}\,\text{cm}$; **d)** $AO = AC = 2\,\text{cm}$.



92. **b)** $\triangle AOB$ — statusis ir lygiašonis, nes $OA = OB = r$, tai kampai prie pagrindo po 45°, $\angle BAD = 45° + 25° = 70°$, $\angle BCD + \angle BAD = 180°$. Iš čia:
$\angle BCD = 180° - 70° = 110°$.
$\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC$; $\angle AOC = \frac{1}{2}(90° + 50°) = 70°$.
$\angle ABC = 180° - \angle ADC$, $\angle ABC = 110°$.
c) Visi keturkampio kampai A, B, C ir D yra įbrėžtiniai, o juos atitinkantys centriniai kampai AOC, BOD po 180°, tai keturkampio kampai lygūs 90°.

Kitaip: Keturkampis, kurio įstrižainės lygios ir dalija viena kitą pusiau yra stačiakampis. Iš brėžinio matome, kad AC ir BD yra to paties apskritimo skersmenys ir susikerta apskritimo centre, tai jos lygios ir dalija viena kitą pusiau (į du spindulius), todėl keturkampis $ABCD$ yra stačiakampis ir visi jo kampai po 90°.
Atsakymai. **a)** $\angle C = 60°$, $\angle D = 100°$;
b) $\angle A = \angle D = 70°$, $\angle B = \angle C = 110°$;
c) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$;
d) $\angle A = 60°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 120°$, $\angle D = 70°$.

Pastaba
Atkreipkite mokinių dėmesį, kad $ABCD$ — lygiašonė trapecija.

Priminkite mokiniams
Jei apie keturkampį apibrėžtas apskritimas, tai to keturkampio priešingų kampų dydžių suma lygi 180°.

10. TRIGONOMETRIJOS TAIKYMAI

10.1. Trigonometrinės tapatybės

Pagrindinės trigonometrinės tapatybės nesunkiai įrodomos remiantis trigonometrinių funkcijų apibrėžimais, Pitagoro teorema ir paprasčiausiais pertvarkiais. Mokiniai turėtų:

- *žinoti* pagrindines trigonometrines tapatybes;
- *gebėti* jas taikyti sinuso, kosinuso, tangento reikšmėms apskaičiuoti;
- *panaudoti* jas trigonometrinių reiškinių paprastiems pertvarkiams.

Sprendžiant užduotis, taikome visus anksčiau išmoktus reiškinių pertvarkius (kėlimą prieš skliaustus, grupavimą, panašių dėmenų sutraukimą ir pan.) bei trigonometrines formules:
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
Be to primename, kad $\sin^2\alpha$, tai supaprastintas užrašas $(\sin\alpha)^2 = \sin\alpha \cdot \sin\alpha$ ir panašiai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 99–102, 104.
Vidutinis lygmuo: 103, 104.
Aukštesnysis lygmuo: 106.

99. **a)** I ketvirčio kampas, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}467$;
b) I ketvirčio kampas, $\operatorname{tg}\alpha = 11{,}045$;
c) IV ketvirčio kampas, $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}268$;
d) II ketvirčio kampas, $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}749$;
e) III ketvirčio kampas, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}701$.

100. **a)** Kai $\cos\alpha = 0{,}985$ ($x > 0$), kampas gali būti I arba IV ketvirčio.
$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.
Kai kampas I ketvirčio, $\sin\alpha > 0$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - 0{,}985^2} \approx 0{,}173$.
Kai kampas IV ketvirčio, $\sin\alpha < 0$, $\sin\alpha = -\sqrt{1 - 0{,}985^2} \approx -0{,}173$.
d) Kai $\cos\alpha = -0{,}070$ ($x < 0$), kampas gali būti II arba III ketvirčio.
Kai kampas II ketvirčio, $\sin\alpha > 0$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - (-0{,}070)^2} \approx 0{,}998$.
Kai kampas III ketvirčio, tai $\sin\alpha < 0$, $\sin\alpha \approx -0{,}998$.
Atsakymai. **a)** $\sin\alpha = 0{,}173$ (I ketvirtis) arba $\sin\alpha = -0{,}173$ (IV ketvirtis);
b) $\sin\alpha = 0{,}643$ (I ketvirtis) arba $\sin\alpha = -0{,}643$ (IV ketvirtis);
c) $\sin\alpha = 0{,}243$ (II ketvirtis) arba $\sin\alpha = -0{,}243$ (III ketvirtis);
d) $\sin\alpha = 0{,}998$ (II ketvirtis) arba $\sin\alpha = -0{,}998$ (III ketvirtis).

101. **a)** $\cos\alpha > 0$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}766^2} \approx 0{,}643$ (I ketvirtis) arba $\cos\alpha < 0$, $\cos\alpha = -\sqrt{1 - 0{,}766^2} \approx -0{,}643$ (II ketvirtis);
b) $\cos\alpha = 0{,}173$ (I ketvirtis) arba $\cos\alpha = -0{,}173$ (II ketvirtis);
c) $\cos\alpha = -0{,}996$ (III ketvirtis) arba $\cos\alpha = 0{,}996$ (IV ketvirtis);
d) $\cos\alpha = -0{,}423$ (III ketvirtis) arba $\cos\alpha = 0{,}423$ (IV ketvirtis).

102. **a)** $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}675 > 0$, tai kampas α arba I arba III ketvirčio.
Iš formulės $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ randame
$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+0{,}675^2}} \approx \pm 0{,}829$.
Kai α yra I ketvirčio kampas, $\cos\alpha = 0{,}829$, kai α yra III ketvirčio kampas, $\cos\alpha = -0{,}829$.
Atsakymai. **a)** $\cos\alpha = 0{,}829$ (I ketvirtis) arba $\cos\alpha = -0{,}829$ (III ketvirtis);
b) $\cos\alpha = 0{,}719$ (I ketvirtis) arba $\cos\alpha = -0{,}719$ (III ketvirtis);
c) $\cos\alpha = 0{,}225$ (I ketvirtis) arba $\cos\alpha = -0{,}225$ (III ketvirtis);
d) $\cos\alpha = 0{,}035$ (I ketvirtis) arba $\cos\alpha = -0{,}035$ (III ketvirtis);
e) $\cos\alpha = -0{,}951$ (II ketvirtis) arba $\cos\alpha = 0{,}951$ (IV ketvirtis).

103. Tikriname sąlygą $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{25} = \frac{9\cdot 25+16}{16\cdot 25} \neq 1$. Tokio kampo nėra.
c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, iš čia $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Toks kampas yra, jis priklauso I ketvirčiui, nes $\sin\alpha > 0$ ir $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Atsakymai. **a)** Ne; **b)** taip, α priklauso III ketvirčiui; **c)** taip, α priklauso I ketvirčiui.

104. **a)** 2; **b)** $\sin^3\alpha$; **c)** $\cos\alpha$; **d)** 1; **e)** 1; **f)** -1; **g)** $2\sin^2\alpha$; **h)** 1; **i)** $1-2\sin^2\alpha$; **j)** 2.

105. **c)** Pertvarkome kairiąją pusę.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 - \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha} = \frac{-\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha} =$
$= \frac{-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = -\operatorname{tg}^2\alpha.$

d) Pertvarkome kairiąją pusę.

$(\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha =$
$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

e) Pertvarkome kairąją pusę.

$(a\cdot\sin\alpha + b\cdot\cos\alpha)^2 + (b\cdot\sin\alpha - a\cdot\cos\alpha)^2 = \underline{a^2\sin^2\alpha} + 2ab\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha +$
$\underline{\underline{b^2\cos^2\alpha}} + \underline{\underline{b^2\sin^2\alpha}} - 2ab\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \underline{a^2\cdot\cos^2\alpha} = a^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) +$
$b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = a^2 + b^2.$

106. **a)** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x} = 1$, todėl $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

b) Galima pastebėti, kad tai ta pati lygybė kaip **a)**.

To nepastebėjus, sprendimas jau buvo matomas: $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x} = 1$.

Iš čia išplaukia, kad $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, tuo pasinaudojame spręsdami **c)**.

c) $1 + \operatorname{ctg} 2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

10.2. Lygtis $\sin x = a$

Kaip rasti lygties $\sin x = a$, $|a| \leqslant 1$ sprendinius, aiškiname naudodamiesi vienetiniu apskritimu ir sinusoide. Mokiniai turėtų:

- *gebėti* pavaizduoti lygties $\sin x = a$, $|a| \leqslant 1$ sprendinius intervale $[0; 2\pi]$ kaip posūkio kampus, kurių sinusai lygūs a;
- *suvokti*, kad lygtis $\sin x = a$, $|a| \leqslant 1$ turi be galo daug sprendinių, nes sinusoidė $y = \sin x$ ir tiesė $y = a$ kertasi taškuose $x_1 + 2\pi k$ ir $x_2 + 2\pi k$, $k \in Z$;
- *suprasti*, kad $\arcsin a$ yra vienintelis lygties $\sin x = a$, $|a| \leqslant 1$ sprendinys intervale $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, kiti sprendiniai randami pagal formulę
$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$.

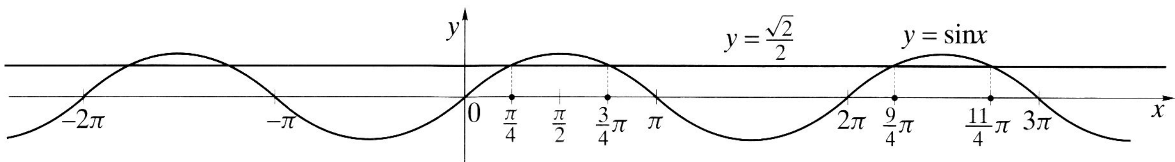
Ši formulė neįrodoma, tik pailiustruojama pavyzdžiu.

Užrašydami lygties $\sin x = a$ sprendinius mokiniai turi pasinaudoti žinomomis tiksliomis kampų 0; $\pm\frac{\pi}{6}$; $\pm\frac{\pi}{4}$; $\pm\frac{\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{2}$ sinusų reikšmėmis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

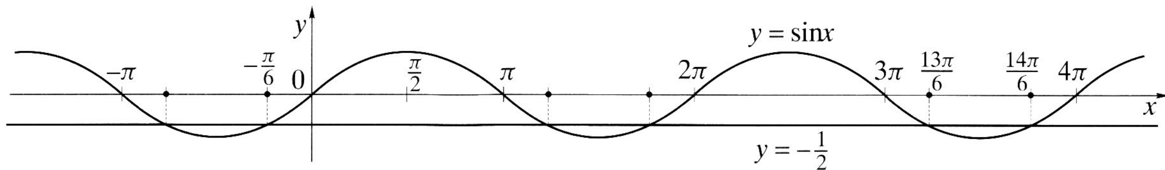
Minimalus lygmuo: 108–111.
Vidutinis lygmuo: 107, 112, 113.

107. 1) Nusibrėžiame $y = \sin x$ ir $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ grafikus. Jų susikirtimo taškų abscisės (x reikšmės) yra lygties sprendiniai.



Lygties $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sprendinys intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ yra $x = \frac{\pi}{4} = 45°$, intervale $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ — $x = 180° - 45° = 135°$, radianais $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Kituose intervaluose x reikšmes nustatome pasinaudodami brėžiniu.

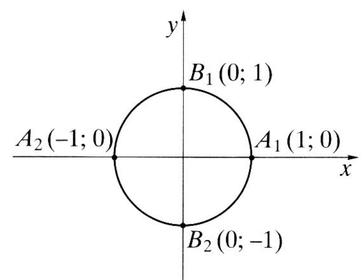
3) Nusibrėžiame $y = \sin x$ ir $y = -\frac{1}{2}$ grafikus. Artimiausias taškui 0 sprendinys yra $x = -\frac{\pi}{6}$, kitus nustatome iš brėžinio.



Atsakymai.

Intervalai	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin x = -\frac{1}{2}$
$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	$x = 45° = \frac{\pi}{4}$	$x = 60° = \frac{\pi}{3}$	sprendinių nėra
$\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$	$x = 135° = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	$x = 120° = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$	sprendinių nėra
$[0; \pi]$	$x = 45°, 135°, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$x = 60°, 120°, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	sprendinių nėra
$[2\pi; 4\pi]$	$x = 405°, 495°, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$	$x = 420°, 480°, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$	$x = 390°, 510°, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$
$(-\infty; +\infty)$	$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot k;$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k,$	$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot k;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi \cdot k$

108. a) Pasinaudojame vienetiniu apskritimu ir sinuso apibrėžimu. Iš brėžinio matome, kad taškų A_1 ir A_2 ordinatės lygios 0, tai $\sin x = 0$, kai $x = 180° \cdot k$, $k \in Z$ arba radianais $x = \pi \cdot k$, $k \in Z$.



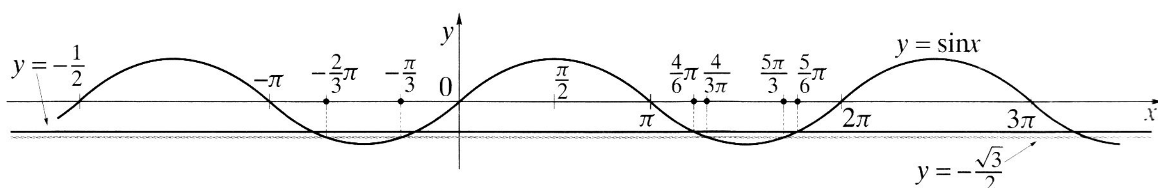
c) Spindulį OA pasukus 270°, 630°, 990° kampu ($\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{3\pi}{2} + 4\pi$, ... radianų kampu), taškas A pereis į tašką $B_2(0; -1)$, tuomet $\sin x = -1$, $x = 270° + 360° \cdot k$ arba $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Dažniau pradinis posūkio kampas imamas $-90°$ ($-\frac{\pi}{2}$ rad.). Lygties $\sin x = -1$ sprendiniai užrašomi taip:

$x = -90° + 360° k$, $k \in Z$, arba radianais $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

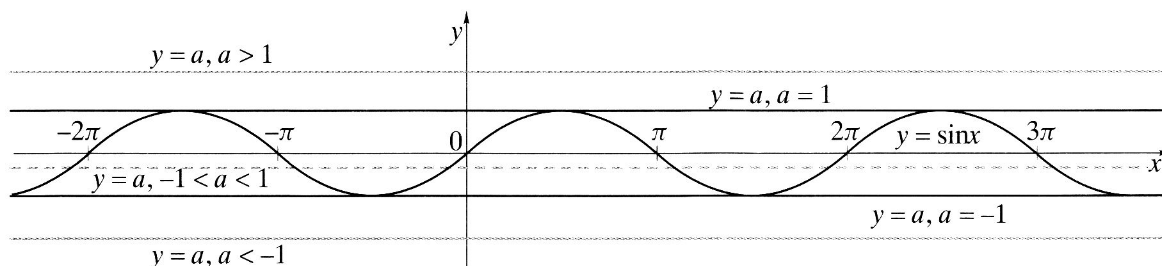
Atsakymai. **a)** $x = \pi \cdot k$, $k \in Z$; **b)** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; **c)** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

109.



Atsakymai. **a)** $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$; **b)** $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

110. Iš brėžinio matome, kad kai $a > 1$ ir kai $a < -1$ lygtis $\sin x = a$ sprendinių neturi.



111. 1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, nes $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, nes $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, nes $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, nes $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$;
$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, nes $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, nes $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, nes $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$;
$\arcsin(-2)$ — neturi prasmės, nes lygtis $\sin x = -2$ neturi sprendinių;
$\arcsin 0 = 0$, nes $\sin 0 = 0$.
2) Taip; ne, nes $\frac{3}{4}\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

112. a) $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; **b)** $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$;
c) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; **d)** $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k,\ k \in Z$;
e) $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k,\ k \in Z$; **f)** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; **g)** $x = \pi k,\ k \in Z$.

Pastaba

Lygčių c), f), g) sprendinius patogiau užrašyti nesinaudojant formule, o taip kaip tai užrašyta 108 uždavinyje.

113. a) $x = \pi k,\ k \in Z$; **b)** $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;
c) sprendinių nėra.

10.3. Lygtis $\cos x = a$

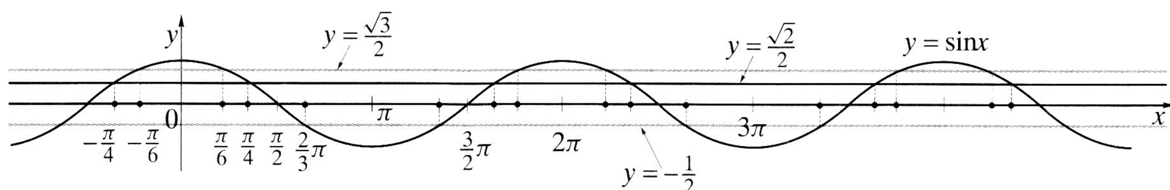
Šio skyrelio struktūra ir uždavinių sprendimo metodika yra analogiška 10.2 skyreliui.
Lygties $\cos x = a$, $|a| \leqslant 1$ sprendimą aiškiname pasinaudodami vienetiniu apskritimu ir $y = \cos x$ grafiku. Mokiniai turėtų:

- *mokėti* vienetiniame apskritime pavaizduoti kampus, kurių kosinusai lygūs a, $|a| \leqslant 1$ ($x \in [0; \pi]$);
- *suvokti*, kad lygtis $\cos x = a$, $|a| \leqslant 1$ turi begalo daug sprendinių;
- *suprasti*, kad $\arccos a$ yra vienintelis lygties $\cos x = a$, $|a| \leqslant 1$ sprendinys intervale $[0; \pi]$, kiti sprendiniai apskaičiuojami naudojantis formule $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 115, 116, 117.1, 118.
Vidutinis lygmuo: 114, 117.2, 118.

114. **1)** Nubraižome grafikus $y = \cos x$ ir $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Jų susikirtimo taškų abscisės (x reikšmės) yra lygties sprendiniai.



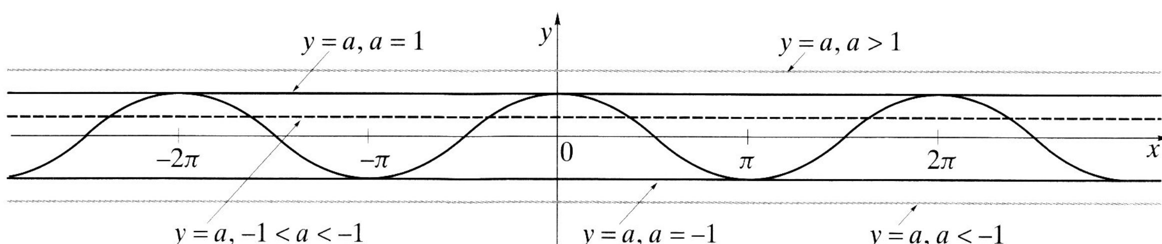
Atsakymas.

Intervalai	$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos x = -\frac{1}{2}$
$[0; \frac{\pi}{2}]$	$x = 45° = \frac{\pi}{4}$	$x = 30° = \frac{\pi}{6}$	sprendinių nėra
$[\frac{\pi}{2}; \pi]$	sprendinių nėra	sprendinių nėra	$x = 180° - 60° = 120° x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
$[0; \pi]$	$x = 45° = \frac{\pi}{4}$	$x = 30° = \frac{\pi}{6}$	$x = 120° = \frac{2\pi}{3}$
$[2\pi; 4\pi]$	$x = 405°, 675°,$ $x = \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$	$x = 390°, 690°,$ $x = \frac{13\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}$	$x = 480°, 600°,$ $x = \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$
$(-\infty; +\infty)$	$x = 45° + 360°k, k \in Z,$ $x = -45° + 360°k, k \in Z,$ $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z,$ $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z,$	$x = 30° + 360°k, k \in Z,$ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z,$ $x = -30° + 360°k, k \in Z,$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z,$	$x = 120° + 360°k, k \in Z,$ $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z,$ $x = -120° + 360°k, k \in Z,$ $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

115. Pasinaudokite vienetiniu apskritimu ir kosinuso apibrėžimu. Užrašę taškų A_1, A_2, B_1, B_2 koordinates mokiniai gali savarankiškai išspręsti šias lygtis.
a) $\cos x = 0$, $x = 90° + 180° \cdot k$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
b) $\cos x = 1$, $x = 0° + 360° \cdot k$, $x = 2\pi k$, $k \in Z$;
c) $\cos x = -1$, $x = 180° + 360° \cdot k$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

Pastaba
Palyginkite su 108 uždavinio sprendimu ir pasinaudokite brėžiniu prie jo.

116. Iš brėžinio matome, kad kai $a > 1$ ir kai $a < -1$, lygtis $\cos x = a$ sprendinių neturi.



117. **1)** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=45°=\frac{\pi}{4}$, nes $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=30°=\frac{\pi}{6}$, nes $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\arccos 1=0°=0$, nes $\cos 0°=1$,
$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=180°-60°=120°=\frac{2\pi}{3}$, nes $\cos 120°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=180°-45°=135°=\frac{3\pi}{4}$, nes $\cos(135°)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=180°-30°=150°=\frac{5\pi}{6}$, nes $\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\arccos(-1)=180°=\pi$, nes $\cos 180°=-1$,
$\arccos(-2)$ neturi prasmės, nes lygtis $\cos x=-2$ neturi sprendinių (visos kosinuso reikšmės yra intervale $[-1;1]$),
$\arccos 0=90°=\frac{\pi}{2}$, nes $\cos 90=0$.

2) Lygybė $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$ teisinga, nes $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ir $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$.
Lygybė $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{3\pi}{4}$ neteisinga, nes $-\frac{3\pi}{4}\notin[0;\pi]$.

Patarkite mokiniams pasinaudoti 77 uždavinyje rastomis kosinusų reikšmėmis.

118. **a)** $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; **b)** $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$;
c) $x=2\pi\cdot k,\ k\in Z$; **d)** $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; **e)** $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$;
f) $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$; **g)** $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

119. **c)** $2\cos x=3$, $\cos x=\frac{3}{2}>1$, sprendinių nėra.
d) $\sin x\cdot\cos x=0$, $\sin x=0$ arba $\cos x=0$, $x=\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.
e) $\sin x\cdot\cos x-\sin x=0$, skaidome dauginamaisiais:
$\sin x(\cos x-1)=0$, $\sin x=0$ arba $\cos x-1=0$, $\cos x=1$,
$x=\pi k$ arba $x=2\pi k,\ k\in Z$.
f) $\cos x+\sin x\cdot\cos x=0$, $\cos x(1+\sin x)=0$,
$\cos x=0$ arba $1+\sin x=0$, $\sin x=-1$,
$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.
Atsakymai. **a)** $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; **b)** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; **c)** sprendinių nėra;
d) $x=\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; **e)** $x=\pi k,\ k\in Z$;
f) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

10.4. Lygtis $\operatorname{tg} x = a$

Aiškindami lygties $\operatorname{tg} x = a$ sprendimą, jos sprendinius pavaizduojame grafiškai.

Intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ lygtis visuomet turi vienintelį sprendinį $x = \operatorname{arctg} a$. Kiti sprendiniai kartojasi kas π, nes mažiausias funkcijos $y = \operatorname{tg} x$ periodas lygus π.

Išnagrinėję skyrelio medžiagą mokiniai turėtų:

- *surasti* lygties $\operatorname{tg} x = a$ sprendinį intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
- *mokėti* užrašyti visus lygties $\operatorname{tg} x = a$ sprendinius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 120, 121–123, 124.1, 125, 126a,b.
Vidutinis lygmuo: 124.2, 126c.

120.

Intervalai	$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$x = 60° = \frac{\pi}{3}$	$x = 30° = \frac{\pi}{6}$	$x = -30° = -\frac{\pi}{6}$
$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$	$x = 60° + 180° = 240°$ $x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$	$x = 30° + 180° = 210°$ $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$	$x = -30° + 180° = 150°$ $x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$
$\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$	$x = 60° - 180° = -120°$ $x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$	$x = 30° - 180° = -150°$ $x = \frac{\pi}{6} - \pi = \frac{5\pi}{6}$	$x = -30° - 180° = -210°$ $x = -\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{7\pi}{6}$
$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$	$x = 60°;\ 240°$ $x = \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$	$x = 30°;\ 210°$ $x = \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$	$x = -30°;\ 150°$ $x = -\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$

121. Tiesė $y = a$ ir grafikas $y = \operatorname{tg} x$ intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ kertasi viename taške.
Atsakymai. **a)**, **b)** vienas sprendinys.

122. **a)** $x = \pi \cdot k,\ k \in Z$; **b)** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

123. Taip, nes $\operatorname{tg} x$ įgyja reikšmes $x \in R$, todėl kirs tiesę $y = a$ kuriame nors taške.

124. **1)** $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$,
$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;
2) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ teisinga, nes $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ ir $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,
$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3}$ neteisinga, nes $-\frac{4\pi}{3} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{5}$ neteisinga, nes $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} \neq 1$.

125. **a)** $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; **b)** $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;
c) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; **d)** $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; **e)** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;
f) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; **g)** $x = \pi k,\ k \in Z$.

126. **c)** $\operatorname{tg} x \cdot \sin x = 0$, $\operatorname{tg} x = 0$ arba $\sin x = 0$. Abiem atvejais $x = \pi k,\ k \in Z$.
Galima spręsti ir kitaip:
$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x = 0$, $\frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0$.
Trupmena lygi 0, kai skaitiklis lygus 0, o vardiklis nelygus 0.
$\sin^2 x = 0$, $\cos x \neq 0$. $\sin x = 0$, $x = \pi k,\ k \in Z$.
Atsakymai. **a)** $\pi k,\ k \in Z$; **b)** $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; **c)** $\pi k,\ k \in Z$.

10.5. Trigonometrija geometrijoje

Šiame skyrelyje kartojame kraštinių ir kampų trigonometrinių funkcijų ryšius stačiajame ir bet kokiame trikampyje. Pravartu išspręsti nors po vieną charakteringą skirtingų tipų uždavinį.

- Apskaičiuokite stačiojo trikampio kampų ir kraštinių didumus, kai žinomi: a) dviejų kraštinių ilgiai; b) viena kraštinė ir smailusis kampas.
- Apskaičiuokite bet kokio trikampio kraštinių ilgius ir kampų didumus, kai žinomi: a) visų kraštinių ilgiai; b) dviejų kampų didumai ir kraštinės ilgis; c) dviejų kraštinių ilgiai ir kampo tarp jų didumas; d) dviejų kraštinių ilgiai ir kampo prieš vieną iš jų didumas.

Pastarąjį atvejį su stipresniais mokiniais galima panagrinėti smulkiau, nes uždavinys gali turėti du, vieną arba iš viso neturėti sprendinių.

Mokiniai turėtų:

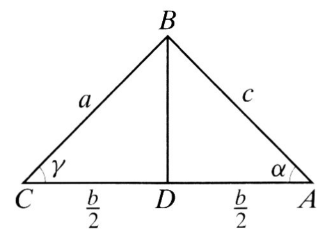
- *savarankiškai* spręsti nurodytų tipų uždavinius;
- *apskaičiuoti* trikampio plotą pasinaudodami formulėmis;
- *gebėti* pritaikyti žinomus trikampių sprendimo būdus praktinio turinio uždaviniams spręsti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 127–129, 133, 135.
Vidutinis lygmuo: 130–132, 137.
Aukštesnysis lygmuo: 134, 136.

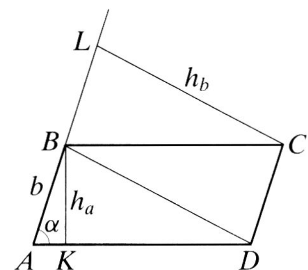
127. **a)** Apskaičiuojame įžambinę $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
Kampą α randame iš lygybės $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\alpha = \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\alpha \approx 33{,}7°$.
Kampą β apskaičiuojame pasinaudodami tuo, kad trikampis status, todėl $\beta = 90° - \alpha = 56{,}3°$.
e) Apskaičiuojame kampą $\beta = 90° - 20°$, $\beta = 70°$.
Iš lygybės $\sin\beta = \frac{b}{c}$ randame $c = \frac{b}{\sin\beta}$, $c = \frac{3}{0{,}940} \approx 3{,}191 \approx 3{,}2$.
Iš $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, randame $a = b\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $a = 3\cdot 0{,}364 = 1{,}092 \approx 1{,}1$.
Atsakymai. **a)** $c = \sqrt{13}$, $\alpha = 33{,}7°$, $\beta = 56{,}3°$;
b) $b = \sqrt{7}$, $\alpha = \arcsin\frac{3}{4} \approx 48{,}6°$, $\beta = 41{,}4°$;
c) $a = 3$, $\alpha = \arccos\frac{4}{5} \approx 36{,}9°$, $\beta = 53{,}1°$;
d) $c = 10$, $b = 5\sqrt{3}$, $\beta = 60°$; **e)** $\beta = 70°$, $c = 3{,}2$, $a = 11$;
f) $a = 1\cdot\sin 40° = 0{,}64$, $b = 1\cdot\cos 40° = 0{,}77$, $\beta = 50°$;
g) $a = 2\cdot\cos\beta$, $b = 2\cdot\sin\beta$, $\alpha = 65°$.

128. **b)** Pastebime, kad trikampis lygiašonis $a = c = 3$, tai kampai prie pagrindo lygūs $\alpha = \gamma$.
Trikampio kampų suma $180° = \alpha + \alpha + 80°$, $2\alpha = 100°$, $\alpha = \gamma = 50°$.
Lygiašonio trikampio aukštinė, išvesta į pagrindą, dalija jį pusiau.
Kraštinės b ilgį apskaičiuojame iš stataus trikampio BAD:
$\cos\alpha = \frac{b}{2} : c$, $\cos\alpha = \frac{b}{2c}$, $b = 2c\cdot\cos\alpha$, $b = 6\cdot\cos 50° \approx 3{,}9$.
Atsakymai. **a)** $c = 1{,}2$, $\alpha = 56{,}4°$, $\beta = 93{,}6°$; **b)** $b = 3{,}9$, $\alpha = \gamma = 50°$;
c) $a = 2\sqrt{13 - 12\cos 35°} \approx 3{,}6$, $\beta = \arcsin\left(\frac{2\sin 35°}{\sqrt{13-12\cos 35^0}}\right) \approx 40°$, $\gamma = 105°$.



129. **a)** 3,75 kv. v.; **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ kv. v.

130. **b)** Lygiagretainio gretimų kampų suma lygi 180°, tai $\alpha = 180° - \beta$, $\alpha = 80°$.
1) Iš stačiojo $\triangle ABK$: $\frac{h_a}{b} = \sin\alpha$, tai $h_a = b\cdot\sin\alpha$, $h_a = 1\cdot\sin 80°$, $h_a \approx 0{,}98$.
$S = a\cdot h_a$, $S = 5\cdot\sin 80°$, $S \approx 4{,}9\,\text{cm}^2$.
2) Iš stačiojo $\triangle BCL$: $\angle LBC = \alpha$, apskaičiuojame h_b.
$\frac{h_b}{a} = \sin\alpha$, tai $h_b = a\cdot\sin\alpha$, $h_b = 5\cdot\sin 80° \approx 4{,}9$.
Plotas $S = 1{,}5\cdot\sin 80° \approx 4{,}9\,\text{cm}^2$.
3) $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2\cdot\frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha = ab\cdot\sin\alpha$.
$S = 1{,}5\cdot\sin 80°$, $S = 5\sin 80° \approx 4{,}9\,\text{cm}^2$.
Jei lygiagretainio plotą skaičiuosime nusibraižę įstrižainę AC, tai $S = 2S_{\triangle ABC} = ab\cdot\sin\beta$. Tada $S = 1{,}5\cdot\sin 100°$. Kadangi $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, tai $\sin 100° = \sin(180° - 80°) = \sin 80°$.

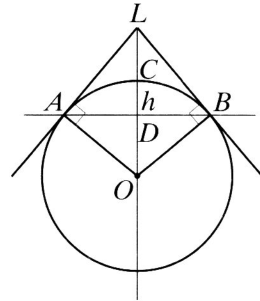


131. Tegul h — pakilimo aukštis, s — kelio ilgis įkalne (nuokalne), $\sin\alpha = \frac{h}{s}$.
1) $\sin\alpha = \frac{10}{100} = 0{,}1$, $\alpha \approx 5{,}7°$.
2) Užrašas 7% ženkle reiškia, kad keliu nuvažiavę s metrų nusileisime (pakilsime) $s \cdot 0{,}07$ metrų: $\sin\alpha = \frac{s \cdot 0{,}07}{s} = 0{,}07$; $\alpha \approx 4°$.
3) Kalno aukštis $h = 600$ m, $\sin 8° = \frac{600}{s}$, $s = \frac{600}{\sin 8°}$.
Atsakymai. **1)** $\sin\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 5{,}7°$; **2)** $\sin\alpha = 0{,}07$, $\alpha = 4°$;
3) Automobilis nuvažiavo $s \approx 4311$ m.

132. **a)** 3,4°; **b)** 17%.

133. $h \approx 17{,}4$ m.

134. **a)** $LO = 6371 + 9 = 6380$ (km).
Atstumus LA, LB, kampus $\angle LOA = \angle LOB$ apskaičiuojame iš stačiųjų trikampių $\triangle OLA = \triangle OLB$. Apskritimo liestinė yra statmena spinduliui, išvestam į lietimosi tašką, $OA = OB = R$, OL — bendra,
$LA^2 = LB^2 = LO^2 - OB^2$, $LA = LB = \sqrt{6380^2 - 6371^2} \approx 339$ (km).
b) $\cos\angle LOA = \frac{6371}{6380}$, $\angle LOA = \angle LOB \approx 3°$, $\angle AOB \approx 6°$.
c) Centrinį 360° kampą atitinka apskritimo lankas lygus $2\pi R$, tai 6° centrinį kampą atitiks $\frac{6}{360} = \frac{1}{60}$ apskritimo lanko dalis.
Lankas $\smile AB = \frac{1}{60} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6371 = \frac{1}{30}\pi \cdot 6371 \approx 667$ (km).
d) Iš lėktuvo matome Žemės rutulio nuopjovos paviršių (pjūvio plokštuma eina per taškus A ir B). Nuopjovos paviršiaus plotas apskaičiuojamas pagal formulę: $S = 2\pi Rh$, kur R — rutulio spindulys, h — nuopjovos aukštinė.
Nuopjovos aukštinę randame iš Žemės spindulio atėmę OD.
$\triangle AOB$ lygiašonis $OA = OB = R$, tai jo aukštinė yra ir pusiaukampinė.
Iš $\triangle AOD$ randame $\cos 3° = \frac{OD}{OA}$, $OD = OA \cdot \cos 3°$, $OD = 6371 \cdot \cos 3° \approx$
≈ 6362 (km).
$h = 6371 - 6362 = 9$ (km), $S = 2\pi \cdot 6371 \cdot 9 = 114\,678 \cdot \pi \approx 360\,089$ (km^2).
Atsakymai. **a)** 6380 km, 339 km, 339 km; **b)** 6°; **c)** 667 km; **d)** 360 089 km^2.



135. **a)** 71°; **b)** 4,7 m.

136. **a)** $\operatorname{tg} x = \frac{4{,}27}{55{,}3} \approx 0{,}0772$, $x = \operatorname{arctg} 0{,}0772 \approx 4{,}4°$.
b) Bokšto sienos ilgis $c = \sqrt{4{,}27^2 + 55{,}3^2} \approx 55{,}46$ (m) (stačiojo trikampio įžambinė).
Kai $x = 1°$, $\sin 1° = \frac{a}{55{,}46}$, $a = 55{,}46 \cdot \sin 1° \approx 0{,}97$ m.
Kai $x = 2°$, $a \approx 1{,}94$ m.
Atsakymai. **a)** 4,4°; **b)** 0,97 m, 1,94 m.

137. $h \approx 138$ m.

11. FUNKCIJOS IŠVESTINĖ

11.1. Kelio ir greičio ryšys

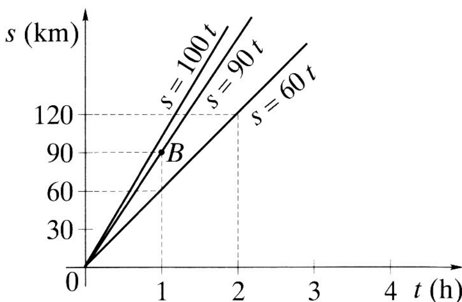
Šiame skyrelyje į kūno judėjimo pastoviu greičiu ir judėjimo su pagreičiu formules žiūrima kaip į laiko t funkcijų išraiškas.
Braižomi kelio ir greičio priklausomybės nuo laiko grafikai.
Skyrelio teorija ir užduotys parengia mokinius išvestinės, kaip naujos funkcijos, charakterizuojančios duotosios funkcijos kitimo greitį, suvokimui.
Mokiniai turėtų:
- *pakartoti*, kaip iš grafiko nustatomas funkcijos kitimo pobūdis, randamos funkcijos reikšmės;
- *prisiminti*, kaip apskaičiuojamas vidutinis greitis;
- *mokėti* rasti judėjimo pagreitį;
- *įsiminti*, kad tiesės $s = vt$ krypties koeficientas (greitis) $v = \operatorname{tg}\alpha$, čia α — kampas, kurį tiesė sudaro su abscisių ašimi t.

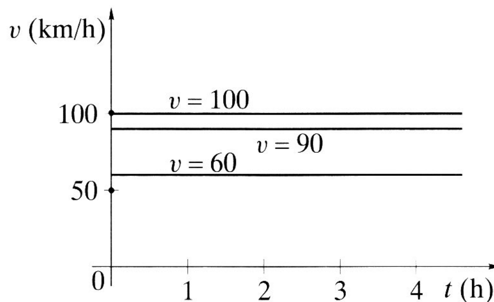
Pastaba. Reikia pratinti mokinius išsiaiškinti, kokie dydžiai atidedami kiekvienoje koordinačių ašyje, pastebėti, kad abscisių ir ordinačių ašių vienetinės atkarpos gali būti skirtingo ilgio.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 149, 150, 152, 155, 157.
Vidutinis lygmuo: 151, 153, 156, 158, 159, 161.
Aukštesnysis lygmuo: 154, 160.

149. **a)** **1)** $v = 60\,\text{km/h} = 1\,\text{km/min.} = 16\frac{2}{3}\,\text{m/s}$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = 60$, $\alpha \approx 89{,}05°$, $\operatorname{tg}\alpha = v$;
b) **1)** $v = 90\,\text{km/h} = 1{,}5\,\text{km/min.} = 25\,\text{m/s}$;
3) Taško B koordinatės $(1; 90)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{90}{1} = 90$, $\alpha \approx 89{,}36°$, $\operatorname{tg}\alpha = v$;
c) **1)** $v = 100\,\text{km/h} = 1\frac{2}{3}\,\text{km/min.} = 27\frac{7}{9}\,\text{m/s}$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = 100$, $\alpha \approx 89{,}43°$.
2) **a)**, **b)**, **c)**

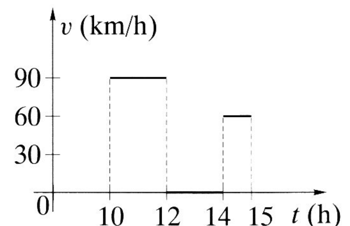




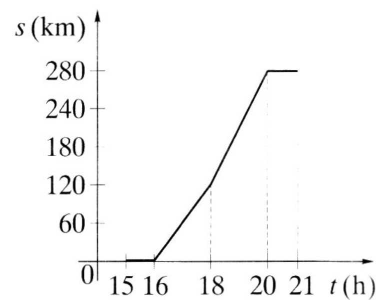
150. **1)** 250 km; **2)** važiavo 5 h, nuo 12 val. iki 14 val., nuo 15 val. iki 18 val.;
3) stovėjo nuo 14 val. iki 15 val. ir nuo 18 val. iki 19 val.;
4) **a)** $v = 50\,\text{km/h}$; **b)** $v = 100\,\text{km/h}$; **c)** $v = 25\,\text{km/h}$; **d)** $v = 50\,\text{km/h}$;
e) $v = 35\frac{5}{7}\,\text{km/h.} \approx 35{,}7\,\text{km/h}$;
5) **a)** 50 km/h; **b)** 0 km/h; **c)** 100 km/h; **d)** 25 km/h; **e)** 0 km/h;
6) **a)** $s(t) = 50t$, $s(t) = 100t$, $s(t) = 25t$; **b)** $s(t) = 0 \cdot t$, t. y. $s = 0$.

Pastaba
Brėžinyje ne visai aišku, koks buvo greitis tarp 16 ir 18 valandos. Tačiau iš kelio grafiko matosi, kad per tas dvi valandas nuvažiuota 50 km, tad reikia laikyti, jog greitis buvo 25 km/h.

151. **a)** $v = 90\,\text{km/h}$, $v = 60\,\text{km/h}$;
b) Automobilis važiavo nuo 10 iki 12 ir nuo 14 iki 15 valandos, iš viso 3 val. Iš viso nuvažiavo 240 km, vidutinis $v_{\text{važiavimo}} = \frac{240}{3} = 80\,(\text{km/h})$.
c) Visas kelionės laikas 5 valandos, nuvažiuotas kelias 240 km, tai vidutinis $v_{\text{kelionės}} = \frac{240}{5} = 48\,\text{km/h}$.
d) Greitis 11 val. — 90 km/h, 12^{15} — 0 km/h; 14^{10} — 60 km/h.



152. $15^{00} - 16^{00}$ val.: $s = 0 \cdot t$, $16^{00} - 18^{00}$ val.: $s = 60 \cdot t$,
$18^{00} - 20^{00}$ val.: $s = 80 \cdot t$, $20^{00} - 21^{00}$ val.: $s = 0 \cdot t$.



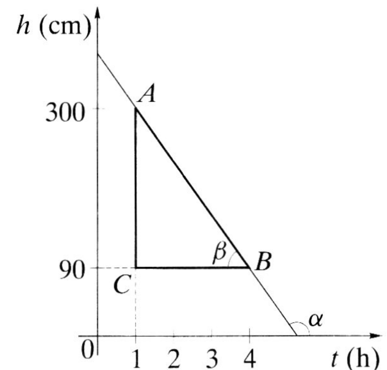
153. **1)** Per 3 valandas vandens lygis sumažėjo $300-90 = 210$ (cm). Aukščio kitimo greitis $v = 70\,\text{cm/h} = 0{,}7\,\text{m/h} = \frac{700}{60}\,\text{mm/min} = 11\frac{2}{3}\,\text{mm/min}$.
2) $h(t) = k \cdot t + b$. Kai $t = 1$, $h(1) = 300$, $300 = k \cdot 1 + b$, kai $t = 4$, $h(4) = 90$, $90 = k \cdot 4 + b$. Koeficientus k ir b rasime išsprendę lygčių sistemą:

$$-\begin{cases} k + b = 300, \\ 4k + b = 90; \end{cases}$$

$$-3k = 210, \quad k = -70.$$

Dabar k reikšmę įstatome į pirmąją lygtį: $-70 + b = 300$, $b = 370$.
3) $h(t) = -70t + 370$ — tai tiesės lygtis.
Atidedame taškus $A(300;\,1)$; $B(90;\,4)$ ir nubrėžiame tiesę.
Iš $\triangle ABC$ rasime $\operatorname{tg}\beta$ ir, pasinaudoję lygybe $\alpha = 180° - \beta$, apskaičiuosime $\operatorname{tg}\alpha$. Kadangi $\operatorname{tg}\beta = \frac{300-90}{3} = 70$, tai
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180° - \beta) = -\operatorname{tg}\beta = -70$, $\operatorname{tg}\alpha = -70$.
Gavome, kad tangento reikšmė sutampa su k reikšme: $\operatorname{tg}\alpha = k$.
4) Pradinis vandens aukštis, kai $t = 0$, buvo $h(0) = 370\,\text{cm}$, t. y. $h(0) = b$.
5) Kai vanduo ištekės, h (vandens aukštis) bus lygus 0:

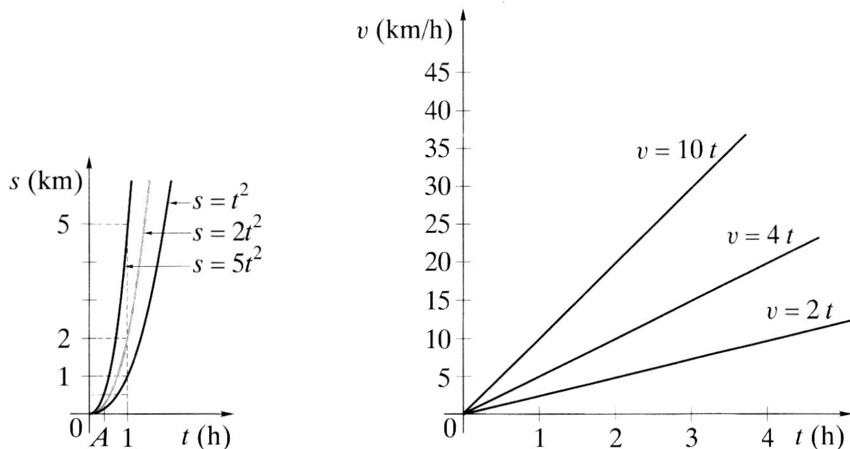
$$-70t + 370 = 0, \quad t = 5\frac{2}{7}\ \text{h}.$$



Atsakymai. **1)** $70\,\text{cm/h} = 0{,}7\,\text{m/h} = 11\frac{2}{3}\,\text{mm/min.}$; **2)** $k = -70$; $b = 370$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = -70$; **4)** $370\,\text{cm} = b$; **5)** $5\frac{2}{7}$ h.

154. Tekėjimo greitį — 20 mm/s; pradinį vandens lygį — 1000 mm; laiką, per kurį ištekės visas vanduo; vandens lygį bet kuriuo laiko momentu.

155. **1)** **a)** $2\,\text{km/h}^2$; **b)** $4\,\text{km/h}^2$; **c)** $10\,\text{km/h}^2$;
2) **a)** $v = 2t$; **b)** $v = 4t$; **c)** $v(t) = 10t$ km/h;
3) **a)** $v(1) = 2\,\text{km/h}$, $v(2) = 4\,\text{km/h}$, $v(10) = 20\,\text{km/h}$;
b) $v(1) = 4\,\text{km/h}$, $v(2) = 8\,\text{km/h}$, $v(10) = 40\,\text{km/h}$, $v(1) = 10\,\text{km/h}$, $v(2) = 20\,\text{km/h}$, $v(10) = 100\,\text{km/h}$.
4) Kelio priklausomybė nuo laiko išreiškiama kvadratine funkcija:
a) $s(t) = t^2$; **b)** $s(t) = 2t^2$; **c)** $s(t) = 5t^2$, jos grafikas — parabolė.
Greičio priklausomybė nuo laiko yra tiesinė funkcija:
a) $v(t) = 2t$; **b)** $v(t) = 4t$; **c)** $v(t) = 10t$, jos grafikas — tiesė.



5) **a)** $v_{\text{vid.}} = 1\,\text{km/h}$, $v_{\text{vid.}} = 3\,\text{km/h}$, $v_{\text{vid.}} = 2\,\text{km/h}$;
b) $v_{\text{vid.}} = 2\,\text{km/h}$, $v_{\text{vid.}} = 6\,\text{km/h}$, $v_{\text{vid.}} = 4\,\text{km/h}$;
c) $v_{\text{vid.}} = 5\,\text{km/h}$, $v_{\text{vid.}} = 15\,\text{km/h}$, $v_{\text{vid.}} = 10\,\text{km/h}$.

156. **a)** Iš grafiko matome, kad greitis 25 m/s, kai $t = 5$ s;
b) Įstatę kurio nors grafiko taško, pvz., (5; 25) koordinates į formulę $v = a \cdot t$, rasime pagreičio reikšmę $a = 5\,\text{m/s}^2$.
c) $s(t) = 2{,}5 \cdot t^2$; **d)** $v(t) = 5 \cdot t$.
e)

Laikas (s)	0	1	2	3	4	5	6
Kelias (m)	0	2,5	10	22,5	40	62,5	90
Momentinis greitis (m/s)	0	5	10	15	20	25	30
Vidutinis greitis (m/s)	0	2,5	5	7,5	10	12,5	15

Pastaba
Greitis grafike nurodytas m/s, o punkte **a)** prašoma rasti km/h. Verčiame: $90\,\text{km/h} = \frac{90 \cdot 1000}{60 \cdot 60}\,\text{m/s} = 25\,\text{m/s}$.

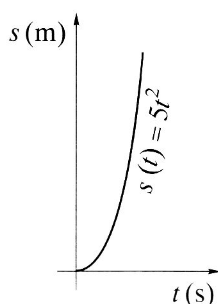
157. **a)** Iš grafiko ir lentelės matome, kad nuo 10 s automobilio greitis pastovus, tai jis greitėdamas važiavo pirmas dešimt sekundžių. Pagreitis lygus $10\,\text{m/s}^2$.
b) Maksimalus greitis $100\,\text{m/s} = 360\,\text{km/h}$.
c) ir **d)** atsakymus randame lentelėje: $s(1) = 5\,\text{m}$, $s(2) = 20\,\text{m}$, $s(10) = 500\,\text{m}$, $s(13) = 800\,\text{m}$; $v(1) = 10\,\text{m/s}$, $v(2) = 20\,\text{m/s}$, $v(10) = 100\,\text{m/s}$, $v(13) = 100\,\text{m/s}$;
e) $v_{\text{vidutinis}} = \frac{s}{t}$, greitėdamas važiavo 10 s ir nuvažiavo 500 m, $v_{\text{vidutinis}} = 500 : 10 = 50\,\text{m/s}$. Per pirmąsias 15 s nuvažiavo 1000 m, tai $v_{\text{vidutinis}} = 1000 : 15 = 66\frac{2}{3}\,\text{m/s}$.

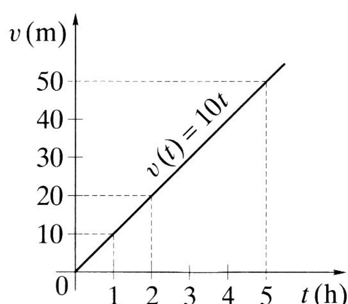
158. **a)** Iš grafiko randame $v(1) = 80\,\text{km/h}$, $v(2) = 70\,\text{km/h}$, $v(5) = 45\,\text{km/h}$.
b) Pagreitis parodo, kiek pasikeitė greitis per laiko vienetą. Laikas grafike duotas sekundėmis, tai, ieškodami pagreičio, greitį apskaičiuosime metrais per sekundę: $80\,\text{km/h} = 22\frac{2}{9}\,\text{m/s}$, $70\,\text{km/h} = 19\frac{4}{9}\,\text{m/s}$. Taigi,
$a = \frac{v(2)-v(1)}{2-1} = \frac{\frac{175}{9}-\frac{200}{9}}{1} = -\frac{25}{9}\,\text{m/s}^2$.
c) Kai kūnas juda su pagreičiu, jo nueitas kelias apskaičiuojamas pagal formulę $s(t) = \frac{a}{2}\cdot t^2$. Kadangi kelias, kurį automobilis nuvažiavo stabdydamas, yra teigiamas skaičius: $s(t) = \left|\frac{-25}{2\cdot 9}\cdot 10^2\right| = 138\frac{8}{9}\,\text{m}$.
Atsakymai. **a)** 80 km/h, 70 km/h, 45 km/h; **b)** $-\frac{25}{9}\,\text{m/s}^2$; **c)** $138\frac{8}{9}\,\text{m}$.

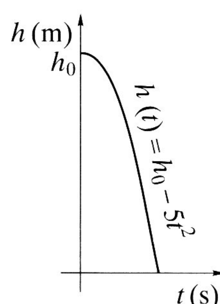
159. **c)** Apskaičiuosime greitėjimo ir lėtėjimo pagreičius m/s^2:
$v(0) = v(14) = 0\,\text{m/s}$, $v(5) = v(12) = 50\,\text{km/h} = \frac{125}{9}\,\text{m/s}$;
$a_{\text{greitėjimo}} = \frac{v(5)-v(0)}{5-0} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}\,\text{m/s}^2$;
$a_{\text{lėtėjimo}} = \frac{v(14)-v(12)}{14-12} = \frac{-125}{18} = -6\frac{17}{18}\,\text{m/s}$.
Automobilio nuvažiuotą atstumą rasime pasinaudodami formule $s(t) = \frac{a}{2}\cdot t^2$. Greitėdamas nuvažiavo $s(5) = \frac{25}{9\cdot 2}\cdot 25 = 34\frac{13}{18}\,\text{m}$, lėtėdamas nuvažiavo $s(2) = \left|\frac{-125}{18\cdot 2}\cdot 2^2\right| = 13\frac{8}{9}\,\text{m}$, pastoviu greičiu važiavo 7 sekundes ir nuvažiavo $s(7) = \frac{125}{9}\cdot 7 = 97\frac{2}{9}\,\text{m}$. Susumavę, gauname:
$34\frac{13}{18} + 13\frac{8}{9} + 97\frac{2}{9} = \frac{625}{18} + \frac{250}{18} + \frac{1750}{18} = \frac{2625}{18} = 145\frac{5}{6}\,\text{m}$.
Atsakymai. **a)** Automobilis judėjo 14 sekundžių;
b) 5 s važiavo greitėdamas, 2 s — lėtėdamas;
c) $34\frac{13}{18}\,\text{m}$, $13\frac{8}{9}\,\text{m}$, $97\frac{2}{9}\,\text{m}$; iš viso $145\frac{5}{6}\,\text{m}$;
d) $v_{\text{vidutinis}} = \frac{145\frac{5}{6}}{14} = 10\frac{5}{12}\,\text{m/s}$;
e) $a_{\text{greitėjimo}} = 2\frac{7}{9}\,\text{m/s}^2$; $a_{\text{lėtėjimo}} = -6\frac{17}{18}\,\text{m/s}^2$.

160. **a)** Kai kūnas juda su pagreičiu, jo nueitas kelias apskaičiuojamas pagal formulę $s(t) = \frac{a}{2}\cdot t^2$, $120 = \left|\frac{a}{2}\cdot 20^2\right|$, $|a| = 0{,}6\,\text{m/s}^2$. Kadangi traukinį stabdė, tai pagreitis neigiamas: $a = -0{,}6\,\text{m/s}^2$.
Traukinio greitis $v(t) = at$. Prieš 20 s iki sustojimo greitis buvo $v(-20) = -0{,}6\cdot(-20) = 12\,(\text{m/s})$.
Atsakymai. **a)** $v = 12\,\text{m/s}$; $a = -0{,}6\,\text{m/s}^2$; **b)** 135 m.

161. **1)** Kai $s(t) = 500\cdot t^2$, tai $g = 1000\,\text{cm/s}^2$. Laikas matuojamas sekundėmis, o kelias — centimetrais.
2) $980\,\text{cm/s}^2 = 9{,}8\,\text{m/s}^2$, $1000\,\text{cm/s}^2 = 10\,\text{m/s}^2$, $s(t) = 5\cdot t^2$.
3) Šulinio gylis: $s(2) = 5\cdot 2^2 = 20\,(\text{m})$, $s(3) = 45\,\text{m}$, $s(5) = 125\,\text{m}$.
4) $v(t) = 10\cdot t$: $v(1) = 10\,\text{m/s}$, $v(2) = 20\,\text{m/s}$, $v(5) = 50\,\text{m/s}$.
5) $s(t) = 5\cdot t^2$, tai per 1-ąją sekundę nukris $s(1) = 5\,\text{m}$, 20 m kūnas kris 2 sekundes. Paskutinė kritimo sekundė yra 2-oji, per ją nukris $20 - 5 = 15\,\text{m}$. 10-ąją sekundę kūnas jau bus nukritęs ir jo nueitas kelias bus lygus 0.
6) Kūno aukštį virš Žemės momentu t randame iš paradinio aukščio h_0 atėmę atstumą, kurį kūnas nukrito per laiką t: **a)** $h(t) = 10-\frac{g}{2}\cdot t^2$; **b)** $h(t) = 20-\frac{g}{2}\cdot t^2$; **c)** $h(t) = 25 - \frac{g}{2}\cdot t^2$; **d)** $h(t) = h_0 - \frac{g}{2}\cdot t^2$.







11.2. Kelio išvestinė

Šio skyrelio medžiaga paruošia mokinius daugianario išvestinės skaičiavimo ir išvestinių taikymo suvokimui. Vadovėlyje nenagrinėjama funkcijos ribos sąvoka, todėl kelio išvestinė įvedama apibrėžiant ją kaip momentinį greitį. Turint laiko, pravartu plačiau paaiškinti, kaip suprantamas momentinis greitis.

Mokiniai turėtų:

- *žinoti*, kad kelio išvestinė lygi kūno greičiui momentu t: $s'(t) = (vt)' = v$, kai v — pastovus ir $s'(t) = \left(\frac{at^2}{2}\right)' = at$, kai kūnas juda pastoviu pagreičiu;
- *taikyti* kelio išvestinę paprastoms užduotims spręsti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 162, 164–167.
Vidutinis lygmuo: 163, 168, 169.

162. **1) a)** $s'(t) = s'(1) = s'(2) = s'(3) = 90$;
b) $s'(t) = s'(1) = s'(2) = s'(3) = 50$; **c)** $s'(t) = s'(1) = s'(2) = s'(3) = 5$;
2) $s'(t)$ — judėjimo greitis bet kuriuo momentu t, $s'(3)$ — judėjimo greitis 3-ąją sekundę.

163. **1)** Ašis s' yra judėjimo greičio $v(t)$ ašis, vietoje klaustuko rašoma greičio reikšmė;
2) a) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45°$, $s'(t) = 1$; **b)** $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63{,}43°$, $s'(t) = 2$; **c)** $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71{,}57°$, $s'(t) = 3$; **d)** $\operatorname{tg}\alpha = v$; $s'(t) = v$. Kai $t > 0$, išvestinės ženklas teigiamas (toks pat kaip ir judėjimo greičio).

Pastaba
Tiesės $s(t) = v \cdot t$ su t ašimi sudaromo kampo tangentas $\operatorname{tg}\alpha = v$ (žr. 153 užd.).

164. **a)** Ašis s' yra judėjimo greičio ašis $v(t)$ ir vietoje klaustukų rašomos greičių reikšmės: aukščiau — v_2, žemiau — v_1, nes iš kelio grafiko matome, kad $v_2 > v_1$.
b) Bet kuriuo laiko momentu antrojo kūno greitis didesnis už pirmojo $v_1 < v_2$, abu greičiai pastovūs; $s_1'(t) = v_1$, $s_2'(t) = v_2$, tai visoms t reikšmėms $s_1'(t) < s_2'(t)$, $s_1'(2) < s_2'(5)$.

165. Vandens aukštis kinta pastoviu greičiu, tuomet $h'(t) = -20\,(\text{cm/h})$: $h'(1) = h'(2) = h'(30) = h'(t) = -20\,(\text{cm/h})$.

166. **a) 1)** $s'(t) = 20 \cdot t$, $s'(1) = 20$, $s'(2) = 40$, $s'(10) = 200$;
2) $s'(t) = v(t)$ yra judančio kūno momentinis greitis bet kuriuo laiko momentu t, $s'(5)$ yra kūno momentinis greitis 5-ąją sekundę; **3)** $s'(5) = 100\,(\text{m/s})$;
b) 1) $s'(t) = 100 \cdot t$, $s'(1) = 100$, $s(2) = 200$, $s'(10) = 1000$;
3) $s'(5) = 500\,(\text{m/s})$;
c) 1) $s'(t) = 0{,}4 \cdot t$: $s'(1) = 0{,}4$, $s'(2) = 0{,}8$, $s'(10) = 4$;
3) $s'(5) = 2\,(\text{m/s})$.

167. **1)** Ašis s' yra judėjimo greičio ašis, ją galime vadinti greičio $v(t)$ ašimi, vietoje klaustuko rašoma greičio reikšmė v; **2)** $s'(t) = a \cdot t$; **3)** $s'(2) = 10$, kai $a = 5\,\text{m/s}^2$; **4)** $12 < s'(3) < 30$, kai $4 < a < 10$.

168. **a)** Ašis s' yra judėjimo greičio ašis, ją galime vadinti greičio $v(t)$ ašimi, vietoje klaustukų rašomos greičių reikšmės: aukščiau — v_2, žemiau — v_1. Iš kelio grafiko matome, kad, kai $t = 1$ (per 1 sekundę), II kūnas nueina didesnį kelią; **b)** $s_1'(t) = a_1 \cdot t$, $s_2' = a_2 \cdot t$; **c)** $s_2'(5) > s_1'(5)$; **d)** $v_1(10) = 10a_1$, $v_2 = 10a_2$.

169. **a)** $s'(t) = 9{,}8 \cdot t$: $s'(1) = 9{,}8$, $s'(10) = 98$; **b)** galima paaiškinti taip: $h(t) = h_0 - 4{,}9 \cdot t^2$, $h'(t) = v(t)$ — kūno laisvo kritimo greitis, $v(t) = -9{,}8 \cdot t$, tai $h'(t) = -9{,}8 \cdot t$; $h'(1) = -9{,}8\,(\text{m/s})$, $h'(2) = -19{,}6\,(\text{m/s})$, $h'(10) = -98\,(\text{m/s})$.

11.3. Daugianario išvestinė

Pasinaudodami tuo, kad funkcijos išvestinę suprantame kaip funkcijos kitimo greitį, užsirašome funkcijų $f(x) = ax$ ir $f(x) = ax^2$ išvestines. Iš vadovėlyje pateiktų pavyzdžių mokiniai turėtų savarankiškai padaryti išvadą, kad $(ax^n)' = nax^{n-1}$, išsiaiškinti, kaip randama daugianario išvestinė.

Mokiniai turėtų:

- *žinoti* keletą pagrindinių išvestinių, pvz., $c' = 0$, $(ax^n)' = nax^{n-1}$, sumos išvestinės formulę $(f(x)\pm \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
- *gebėti* rasti laipsninės funkcijos ir daugianario išvestines, apskaičiuoti jų reikšmes nurodytuose taškuose.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 170, 171a–d,g, 174a–g, 175.1–4, 176, 178.1,2.
Vidutinis lygmuo: 171e,f,h,i, 172, 174h,i, 175.5, 177b, 178.3, 179.
Aukštesnysis lygmuo: 173, 177a, 180.

170. **a)** 3; **b)** -3; **c)** $\frac{1}{3}$; **d)** $-\frac{1}{3}$; **e)** $\sqrt{2}$; **f)** $\log_2 3$; **g)** $\operatorname{tg} 10^0$; **h)** $\lg 5$; **i)** 0, nes $\sin 0^0 = 0$.

171. **a)** $6x$; **b)** $-6x$; **c)** $2\sqrt{5}x$;
d) $30x^9$; **e)** $15 \cdot \log_5 10 \cdot x^{14}$; **f)** x^4;
g) $\sqrt{3}x^5$; **h)** $\frac{-10}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}}x^9$; **i)** $\frac{\sqrt{3}}{\cos\sqrt{3}}$.

172. **a)** $-x^{-2}$; **b)** $-2x^{-3}$; **c)** $9x^{-4}$;
d) $-x^{-6}$; **e)** $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; **f)** $-x^{-\frac{4}{3}}$; **g)** $2x^{\sqrt{2}-1}$;
h) $2x^{\sqrt{3}-1}$; **i)** $\sin 33° \cdot x^{-34}$.

173. **2)** *Bet kokio skaičiaus išvestinė lygi* **0**.

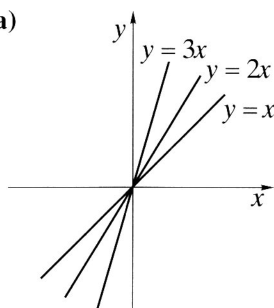
174. **a)** $f'(3) = f'(-3) = f'(0) = 5$;
b) $f'(3) = f'(-3) = f'(0) = 1$;
c) $f'(3) = f'(-3) = f'(0) = -1$;
d) $f'(3) = 3,\ f'(-3) = -3,\ f'(0) = 0$;
e) $f'(3) = -2,\ f'(-3) = 2,\ f'(0) = 0$;
f) $f'(3) = 6\sqrt{2},\ f'(-3) = -6\sqrt{2},\ f'(0) = 0$;
g) $f'(3) = 49 \cdot 3^6 = 35\,721,\ f'(-3) = 35\,721,\ f'(0) = 0$;
h) $f'(x) = \frac{1}{2}\log_2 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$, $f'(3) = \frac{\log_2 5}{2\sqrt{3}}$, $f'(-3)$ neturi prasmės, $f'(0)$ neturi prasmės;
i) $f'(x) = \frac{-x^{-\frac{4}{3}}}{15\cdot\log_3 4}$, $f'(3) = \frac{-1}{45\cdot\sqrt[3]{3}\log_3 4}$, $f'(-3)$ neturi prasmės, $f'(0)$ neturi prasmės.

Priminkite mokiniams

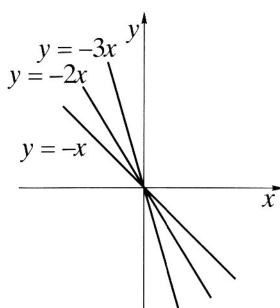
Laipsnis racionaliuoju rodikliu turi prasmę tik tuomet, kai laipsnio pagrindas teigiamas skaičius.

175. **1)**

a)



b)

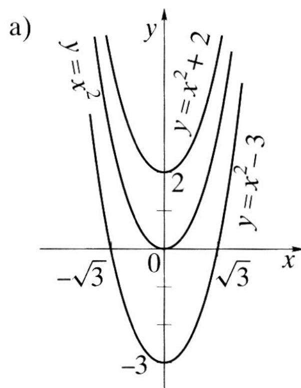


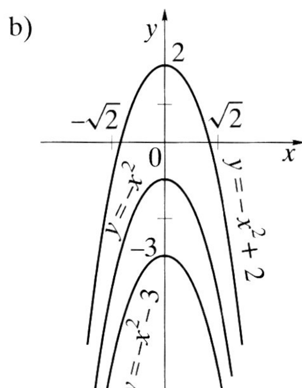
2) Kai $k > 0$, funkcija yra didėjanti, kai $k < 0$, funkcija — mažėjanti.
3) **a)** $f'(x) = x' = 1$; $f'(x) = (2x)' = 2$; $f'(x) = (3x)' = 3$;
b) $g'(x) = -1$; $g'(x) = -2$; $g'(x) = -3$.
4) ir **5)** teisingi teiginiai: Jei funkcija $f(x) = kx$ arba $g(x) = kx + b$ (čia k ir b — skaičiai, $k \neq 0$) yra *didėjanti*, tai jos *išvestinė yra teigiama*, o jei *mažėjanti*, tai jos *išvestinė yra neigiama*.

176. **a)** $6x + 1$; **b)** $21x^2 - x^9$; **c)** $-x^{-3} - 3x^{-4}$; **d)** $2x^{\sqrt{2}-1}$; **e)** $5(\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}}$;
f) $f'(x) = -5x^{-6}$.

177. **a)** Kai $x = 0$, duotoji funkcija neegzistuoja (dalyba iš 0 negalima), tad jos išvestinė taip pat neegzistuoja; **b)** $f'(\sqrt{2}) = 9\sqrt{2}$.

178. **1)** **a)** $y'(x) = 2x$, $y'(0) = 0$; **b)** $y'(x) = -2x$, $y'(0) = 0$.

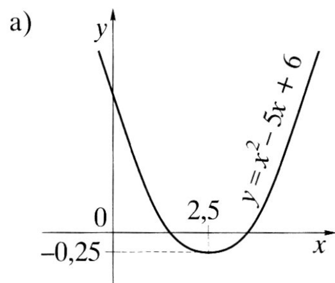
a)


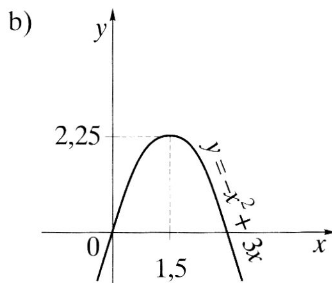
b)


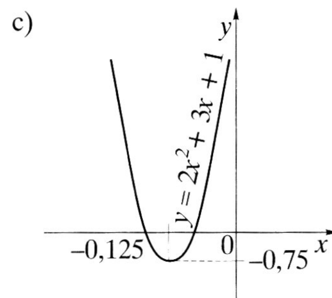
Pastaba

Funkcijos $y = f(x) + c$ grafiką galima gauti remiantis funkcijos $y = f(x)$ grafiku. Reikia tik jį pastumti per c lygiagrečiai y ašiai aukštyn (kai $c > 0$) arba žemyn (kai $c < 0$).

2) **a)** $f'(x) = 2x - 5$, $f'(2{,}5) = 0$; **b)** $f'(x) = -2x + 3$, $f'(1{,}5) = 0$; **c)** $f'(x) = 4x + 3$, $f'(-0{,}75) = 0$.

a)


b)


c)


3) Funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ išvestinė $f'(x) = 2ax + b$. Ji lygi 0, kai $2ax + b = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$, todėl $f'(-\frac{a}{2b}) = 0$.

179. **a)** $y'(x) = 3x^2$, $y'(0) = 0$; **b)** $y'(x) = -3x^2$, $y'(0) = 0$; **c)** $y'(x) = 6x^2$, $y'(0) = 0$; **d)** $y'(x) = 3x^2$, $y'(0) = 0$. Funkcijos $f(x) = ax^3 + b$ (a, b — skaičiai, $a \neq 0$) išvestinė taške $x = 0$ yra lygi nuliui.

180. $\sin' x = \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - \frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \cdots\right)' = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2} - \frac{x^6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \cdots\right)$;
$\cos' x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2} - \frac{x^6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \cdots\right)' = \left(-x + \frac{x^3}{3\cdot 2} - \frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - \cdots\right)$.
Atsakymas. Iš lygybių matome, kad $\sin' x = \cos x$; $\cos' x = -\sin x$.

11.4. Geometrijos uždaviniai

Spręsdami šio skyrelio uždavinius mokiniai pakartoja apskritimo liestinių savybes, į trikampį įbrėžto apskritimo ir apie apskritimą apibrėžto keturkampio sąvokas ir savybes.

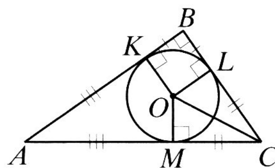
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 181a,b, 182a, 183.
Vidutinis lygmuo: 181c,d.
Aukštesnysis lygmuo: 182b.

181. c) $AC = AB$. Iš stataus $\triangle AOB$ randame AB:
$\mathrm{tg}\angle AOB = \frac{AB}{BO}$, $AB = BO \cdot \mathrm{tg}\angle AOB$, $AC = AB = 3 \cdot \mathrm{tg}\,60°$, $AC = 3\sqrt{3}$.
d) $\triangle AOB$ — status, $\angle BAO = \frac{1}{2}\angle BAC = 40°$, $\sin 40° = \frac{OB}{AO}$, $AO = \frac{5}{\sin 40°}$,
$\mathrm{tg}\,40° = \frac{OB}{AB}$, $AC = AB = 5 \cdot \mathrm{tg}\,40°$.

Atsakymai. **a)** $AB = AC = \sqrt{21}$; **b)** $AO = \sqrt{10}$; **c)** $AC = 3\sqrt{3}$;
d) $AO = \frac{5}{\sin 40°}$, $AC = AB = 5 \cdot \mathrm{tg}\,40°$.

182. b) Papildome brėžinį — brėžiame apskritimo spindulius į lietimosi taškus. Tie spinduliai yra statmeni trikampio kraštinėms (liestinėms).



$P = AM + MC + CL + LB + BK + KA$, $CM = CL$, $BK = BL$, $AK = AM$,
$P = 2(CM + BK + AK)$.
Randame atkarpų CM, BK ir AK ilgius.
Iš stataus $\triangle MOC$ apskaičiuojame CM:
$CM = \sqrt{OC^2 - OM^2}$; $CM = \sqrt{40 - 4} = 6$. $CM = 6$.
Keturkampio $OKBL$ visi kampai statūs, tad jis yra stačiakampis, gretimos kraštinės BK ir BL lygios, tad $OKBL$ — kvadratas ir $BK = BL = 2$.
$AK = AM = x$, iš stačiojo $\triangle ABC$: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AC = x + 6$, $AB = x + 2$, $BC = 2 + 6 = 8$.
$(x + 6)^2 = (x + 2)^2 + 8^2$, $8x = 32$, $x = 4$.
Todėl $P = 2(4 + 6 + 2) = 24$.

Atsakymai. **a)** 9; **b)** 24.

183. a) $BC = 9$; **b)** $AB = 9$; $AD = 8$.

12. IŠVESTINIŲ TAIKYMAI

12.1. Funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo požymiai

Jei anksčiau funkcijų savybes nagrinėjome remdamiesi funkcijų grafikais, tai šiame skyrelyje atskleidžiamas ryšys tarp funkcijos reikšmių didėjimo (mažėjimo) ir funkcijos išvestinės ženklo.

Todėl mokiniai turėtų mokėti rasti funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus:

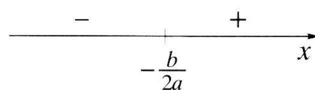
- remdamiesi funkcijos *grafiku*;
- nustatydami funkcijos *išvestinės ženklą*.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 191, 192.1, 193.1,2.
Vidutinis lygmuo: 192.2, 193.3, 194.
Aukštesnysis lygmuo: 195.

191. **1)** Teiginys teisingas. Pasinaudojame 175 uždavinio išvada ir tuo, kad skaičiaus išvestinė lygi 0;
2) a) $f'(x) = 2$, didėjanti; **b)** $f'(x) = -7$, mažėjanti;
c) $f'(x) = 1$, didėjanti; **d)** $f'(x) = -1$, mažėjanti;
3) a) didėjanti; **b)** didėjanti; **c)** mažėjanti; **d)** mažėjanti.

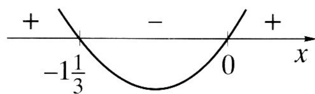
192. **2)** Funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ išvestinė $f'(x) = 2ax + b$. Nustatome išvestinės ženklą: $f'(x) = 2ax+b$ yra tiesinė funkcija ir ženklą keičia viename taške, kuriame $2ax + b = 0$, $2a\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$.



Kai $a < 0$ ir $x < -\frac{b}{2a}$, tai $2a < 0$ ir $x + \frac{b}{2a} < 0$, išvestinė teigiama, funkcija didėjanti intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$;
kai $a < 0$ ir $x > -\frac{b}{2a}$, tai $2a < 0$ ir $x + \frac{b}{2a} > 0$, išvestinė neigiama, funkcija mažėjanti intervale $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$;
kai $a > 0$ ir $x < -\frac{b}{2a}$, tai $2a > 0$ ir $x + \frac{b}{2a} < 0$, išvestinė neigiama, funkcija mažėjanti intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$;
kai $a > 0$, ir $x > -\frac{b}{2a}$, tai $2a > 0$ ir $x + \frac{b}{2a} > 0$, išvestinė teigiama, funkcija didėjanti intervale $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
5) Funkcijos $f(x) = ax^2+bx+c$ išvestinė $f'(x) = 2ax+b = 0$, kai $x = -\frac{b}{2a}$, ši reikšmė sutampa su parabolės $y = ax^2 = bx + c$ viršūnės abscise.

Atsakymai. **1)** ir **4) a)** $f'(x) = 6x + 12$; kai $x \in (-\infty; -2)$, tai funkcija mažėjanti; kai $x \in (-2; +\infty)$, tai funkcija didėjanti;
b) $f'(x) = -4x - 1$; kai $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$, tai funkcija didėjanti;
kai $x \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, tai funkcija mažėjanti;
c) $f'(x) = 2x + 2$; kai $x \in (-\infty; -1)$, tai funkcija mažėjanti;
kai $x \in (-1; +\infty)$, tai funkcija didėjanti;
d) $f'(x) = -2x$; kai $x \in (-\infty; 0)$, tai funkcija didėjanti; kai $x \in (0; +\infty)$, tai funkcija mažėjanti;
3) a) $(-2; -13)$; **b)** $\left(-\frac{1}{4}; 1\frac{1}{8}\right)$; **c)** $(-1; -1)$; **d)** $(0; 4)$.
4) Taškų $(x_0; f(x_0))$ koordinatės sutampa su parabolės viršūnės koordinatėmis (žr. p. **3)**).

193. **3) a)** Išvestinės $f'(x) = 6x^2 + 8x$ ženklą nustatome pasinaudoję parabolės eskizu. Parabolė $y = 6x^2 + 8x$ kerta x ašį taškuose $x = 0$ ir $x = -1\frac{1}{3}$.



$f'(x) > 0$ intervaluose $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right)$ ir $(0; +\infty)$, tai funkcija $f(x) = 2x^3+4x^2$ šiuose intervaluose yra didėjanti;
$f'(x) < 0$ intervale $\left(-1\frac{1}{3}; 0\right)$, tai funkcija $f(x) = 2x^3 + 4x^2$ šiame intervale mažėjanti.

Atsakymai.
1) a) $f'(x) = 3x^2$, $f'(x) > 0$, funkcija yra didėjanti, išskyrus tašką $x = 0$;
b) $f'(x) = -3x^2$; $f'(x) < 0$, funkcija yra mažėjanti, išskyrus tašką $x = 0$;
c) $f'(x) = 6x^2$; $f'(x) > 0$, funkcija yra didėjanti, išskyrus tašką $x = 0$;
d) $f'(x) = -12x^2$; $f'(x) < 0$, funkcija yra mažėjanti, išskyrus tašką $x = 0$.
2) Kai $a > 0$, $f'(x) \geqslant 0$, funkcija $f(x) = ax^3$ yra didėjanti, išskyrus tašką $x = 0$, kai $a < 0$, $f'(x) \leqslant 0$, funkcija $f(x) = ax^3$ yra mažėjanti, išskyrus tašką $x = 0$.

Pastaba
Taške $x = 0$ funkcija nėra nei didėjanti, nei mažėjanti.

3) a) didėjanti intervaluose $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right)$ ir $(0; +\infty)$, mažėjanti intervale $\left(-1\frac{1}{3}; 0\right)$;
b) didėjanti intervale $(0; 2)$, mažėjanti intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; +\infty)$;
c) didėjanti intervaluose $(-\infty; 2)$ ir $(3; +\infty)$, mažėjanti intervale $(2; 3)$;
d) didėjanti intervale $(-2; 2)$, mažėjanti intervaluose $(-\infty; -2)$ ir $(2; +\infty)$.

194. 1) a) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$. Išvestinė neigiama visoje funkcijos apibrėžimo srityje $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, todėl funkcija yra mažėjanti visoje savo apibrėžimo srityje.
d) $f(x) = -\frac{3}{x} = -3x^{-1}$, $f'(x) = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$. Išvestinė teigiama visoje funkcijos apibrėžimo srityje $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, todėl funkcija yra didėjanti visoje savo apibrėžimo srityje.
Atsakymai. **1) a)** $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, mažėjanti; **b)** $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$, mažėjanti;
c) $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, didėjanti; **d)** $f'(x) = \frac{3}{x^2}$, didėjanti.
2) Kai $k > 0$, funkcija $f(x) = \frac{k}{x}$ yra mažėjanti visoje savo apibrėžimo srityje.
Kai $k < 0$, funkcija $f(x) = \frac{k}{x}$ yra didėjanti visoje savo apibrėžimo srityje.

195. a) $f'(x) > 0$ intervaluose $(-\infty; -4)$ ir $(0; +\infty)$, $f'(x) < 0$ intervale $(-4; 0)$; **b)** $f'(x) > 0$ intervaluose $(-7; -3)$ ir $(0; 3{,}5)$, $f'(x) < 0$ intervaluose $(-\infty; -7)$, $(-3; 0)$ ir $(3{,}5; +\infty)$; **c)** $f'(x) > 0$ intervaluose $\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$, $f'(x) < 0$ intervaluose $\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; **d)** $f'(x) > 0$ intervaluose $\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}; 2\pi k\right)$, $k \in Z$, $f'(x) < 0$ intervaluose $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$;
e) $f'(x) > 0$ visoje funkcijos apibrėžimo srityje $\left(\pi k - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$;
f) $f'(x) > 0$ visoje funkcijos apibrėžimo srityje $(0; +\infty)$;
g) $f'(x) > 0$ visoje funkcijos apibrėžimo srityje $x \in R$.

Priminkite mokiniams

Jei funkcija $f(x)$ yra didėjanti (mažėjanti) intervale $(a; b)$ ir turi išvestinę, tai jos išvestinė visame šiame intervale yra teigiama (neigiama).

12.2. Funkcijos ekstremumo taškai

Skyrelyje paaiškinamos ir apibrėžiamos sąvokos: „funkcijos maksimumo (minimumo) taškas“, „funkcijos maksimumas (minimumas)“, „funkcijos ekstremumo taškas“, „funkcijos ekstremumas“.
Išsprendžiamas pavyzdys, parodantis, kaip pasinaudoti funkcijos išvestine tiriant funkciją ir braižant jos grafiko eskizą.

Mokiniai turėtų:

- *mokėti* nustatyti funkcijos ekstremumo taškus;
- *apskaičiuoti* funkcijos ekstremumus;
- *pasinaudoti* funkcijos išvestine paprastų funkcijų tyrimui ir grafiko eskizui nubrėžti.

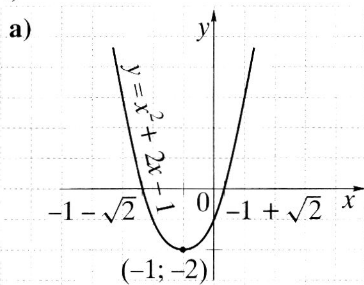
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 196, 198, 199.
Vidutinis lygmuo: 197.

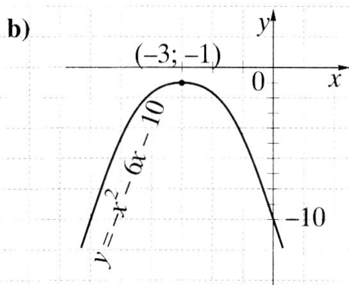
196. a) 1) $x_0 = -1$; **2)** $y_0 = -2$; **3)** funkcija $f(x) = x^2 + 2x - 1$ didėjanti intervale $(-1; +\infty)$, mažėjanti intervale $(-\infty; -1)$, kerta x ašį taškuose $\left(-1-\sqrt{2}; 0\right)$ ir $\left(-1+\sqrt{2}; 0\right)$, teigiama, kai $x \in \left(-\infty; -1-\sqrt{2}\right) \cup \left(-1+\sqrt{2}; +\infty\right)$, neigiama, kai $x \in \left(-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right)$; **b) 1)** $x_0 = -3$; **2)** $y_0 = -1$; **3)** funkcija $g(x) = -x^2 - 6x - 10$ didėjanti intervale $(-\infty; -3)$, mažėjanti intervale $(-3; +\infty)$; funkcijos grafikas x ašies nekerta; visos funkcijos reikšmės yra neigiamos.

4)

a)

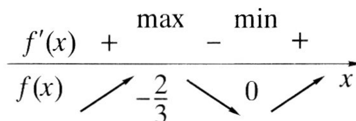


b)



197. a) $f(x) = \sin x$ ekstremumo taškai yra $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $f(x) = \operatorname{tg} x$ ekstremumo taškų neturi;
b) $g(x) = \cos x$ minimumo taškai yra $x_k = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, maksimumo taškai yra $x_m = 2\pi m$, $m \in Z$, ekstremumo taškai yra $x_n = \pi k$, $n \in Z$; $f(x_k) = -1$ — funkcijos minimumas, $f(x_m) = 1$ — funkcijos maksimumas;
c) Pavyzdžiui, funkcijos $f(x) = 2x + 13$; $f(x) = a^x$; $f(x) = \frac{k}{x}$; $f(x) = \sqrt[3]{x}$ neturi ekstremumo taškų.

198. a) 1) $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f'(x) = x(3x + 2)$;
2) $x(3x + 2) = 0$, $x_1 = 0$ arba $x_2 = -\frac{2}{3}$. Taškai x_1 ir x_2 gali būti funkcijos ekstremumo taškais.
3) Nustatysime išvestinės $f' = x(3x + 2)$ ženklą į kairę ir į dešinę nuo šių taškų. Kai $x < -\frac{2}{3}$, $f'(x) > 0$, kai $-\frac{2}{3} < x < 0$, $f'(x) < 0$, kai $x > 0$, $f'(x) > 0$.



Pereinant per tašką $x = -\frac{2}{3}$, funkcijos išvestinės ženklas keičiasi iš + į –, taigi taškas $x = -\frac{2}{3}$ yra funkcijos maksimumo taškas; $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ — funkcijos maksimumas.
Pereinant per tašką $x = 0$, funkcijos išvestinės ženklas keičiasi iš – į +, tai taškas $x = 0$ yra funkcijos minimumo taškas; $f(0) = 0$ — funkcijos minimumas.
Kai $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ ir $x \in (0; +\infty)$ — funkcija didėjanti, kai $x \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ — funkcija mažėjanti.
c) 1) $f(x)' = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$;
2) $f'(x) = 0$, $x^2 + 1 = 0$ — lygtis sprendinių neturi, ekstremumo taškų nėra, $f'(x) > 0$ visoms x reikšmėms, taigi funkcija yra didėjanti visoje apibrėžimo srityje.

Atsakymai. **b)** Funkcija didėjanti intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$, mažėjanti intervale $(-1; 1)$, $x = -1$ — maksimumo taškas, $f(-1) = 2$ — funkcijos maksimumas, $x = 1$ — minimumo taškas; $f(1) = -2$ — funkcijos minimumas;
d) funkcija didėjanti intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(4; +\infty)$, mažėjanti intervale $(0; 4)$, $x = 0$ — maksimumo taškas, $f(0) = 0$ — funkcijos maksimumas, $x = 4$ — minimumo taškas; $f(4) = -32$ — funkcijos minimumas.

199. **a)** **1)** ekstremumo taškai: $x = -5$, $x = -2$, $x = 0$, minimumo taškai $x = -5$ ir $x = 0$, maksimumo taškas $x = -2$, $f(-5) = -2$ ir $f(0) = -6$ — funkcijos minimumai, $f(-2) = 2$ — funkcijos maksimumas;
2) funkcija didėjanti, $f'(x) > 0$ intervaluose $(-5; -2)$ ir $(0; +\infty)$; funkcija mažėjanti, $f'(x) < 0$ intervaluose $(-\infty; -5)$ ir $(-2; 0)$; $f(x) > 0$, kai $x \in (-\infty; -7) \cup (-3; -1) \cup (4; +\infty)$, $f(x) < 0$, kai $x \in (-7; -3) \cup (-1; 4)$;
b) **1)** ekstremumo taškai: $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$, minimumo taškas $x = 1$, maksimumo taškai $x = -2$ ir $x = 3$, $f(1) = -1$ — funkcijos minimumas, $f(-2) = 2$ ir $f(3) = 3$ — funkcijos maksimumai;
2) funkcija didėjanti intervaluose $(-\infty; -2)$ ir $(1; 3)$; funkcija mažėjanti intervaluose $(-2; 1)$ ir $(3; +\infty)$, $f(x) > 0$, kai $x \in (-4; 0) \cup (2; 4)$, $f(x) < 0$, kai $x \in (-\infty; -4) \cup (0; 2) \cup (4; +\infty)$;
3) $g' = 0$, kai $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$.

12.3. Funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmė uždarame intervale

Skyrelio uždavinių sprendimą galima pradėti nuo funkcijos didžiausios ir mažiausios reikšmės radimo uždarame intervale bendros schemos, pateiktos 207 uždavinyje.
Galima uždavinius spręsti ir remiantis tuo, kad kvadratinė funkcija turi tik vieną ekstremumo tašką: minimumo ar maksimumo, o kitos reikšmės atitinkamai didesnės arba mažesnės už reikšmes ekstremumo taške. Nustatyti kvadratinės funkcijos ekstremumo pobūdį, t. y. ar tai minimumo ar maksimumo taškas, galima nagrinėjant išvestinės ženklo kitimą pereinant per ekstremumo tašką.

Mokiniai turėtų:

- *suprasti*, kad uždarame intervale tolydi funkcija didžiausią arba mažiausią reikšmę įgyja nebūtinai ekstremumo taškuose;
- *mokėti* pasinaudoti bendra didžiausios arba mažiausios funkcijos reikšmės uždarame intervale radimo schema;
- spręsdami praktinio turinio užduotis paprastais atvejais *užrašyti* funkcinę priklausomybę ir rasti funkcijos didžiausią ar mažiausią reikšmę.

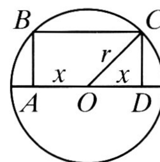
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 200, 201, 207, 208.
Vidutinis lygmuo: 204, 205.
Aukštesnysis lygmuo: 202, 203, 206.

200. **a)**, **b)**, **c)** dėmenys 10 ir 10. Jei skaičius 200 — dėmenys 100 ir 100, jei skaičius 1000 — dėmenys 500 ir 500, jei skaičius 51 — dėmenys 25,5 ir 25,5, jei skaičius a — dėmenys $\frac{a}{2}$ ir $\frac{a}{2}$.

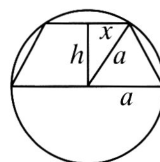
201. **c)** Jei aptvaro dvi priešingos kraštinės lygios x m, tai trečioji kraštinė lygi $(a-2x)$ m. Plotas $Q(x)=x(a-2x)$, $Q(x)=ax-2x^2$, $x\in\left[0;\frac{a}{2}\right]$.
Pasinaudojame bendra schema:
1) Ieškome funkcijos ekstremumo taškų: $Q'(x)=a-4x=0$, $x=\frac{a}{4}$.
2) Apskaičiuojame funkcijos reikšmes intervalo galuose $Q(0)=Q(\frac{a}{2})=0$ ir taške $x=\frac{a}{4}$, $Q\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a^2}{8}$.
3) Išrenkame didžiausią funkcijos reikšmę: $Q(\frac{a}{4})=\frac{a^2}{8}$.
Atsakymai. **a)** $1250\,\text{m}^2$; **b)** $312{,}5\,\text{m}^2$; **c)** $\frac{a^2}{8}$ kv. v.

202. Atstumą nuo pusskritulio centro iki stačiakampio viršūnės, esančios skersmenyje pažymėkime x. Tada viena stačiakampio kraštinė lygi $2x$, o kita — $\sqrt{r^2-x^2}$, stačiakampio plotas $S(x)=2x\cdot\sqrt{r^2-x^2}$. Ieškant x, su kuria $S(x)$ didžiausias, reikia rasti $S(x)$ išvestinę. Bet $S(x)$ funkcija yra sudėtinė, be to, sudaryta iš sandaugos. Tokios išvestinės mokiniai nemokės rasti — tai neįeina į programą...



Todėl šio uždavinio sąlygą vertėtų pataisyti:
Iš visų stačiakampių raskite tą, kurio plotas yra didžiausias, o skersmenyje esančios kraštinės ilgis yra lygus sveikajam centimetrų skaičiui.
Tada sudarę stačiakampio ploto funkciją:
a) $S(x)=2x\cdot\sqrt{100-x^2}$ ieškome, su kuria $x=1,2,\dots,9$ reikšme plotas yra didžiausias;
b) $S(x)=2x\cdot\sqrt{25-x^2}$ ieškome, su kuria $x=1,2,3,4$ reikšme plotas yra didžiausias;
Tas x reikšmes randame bandymų ir klaidų metodu (vienu atveju užtenka patikrinti 9 reikšmes, kitu — vos 4).
c) punktą paliekame olimpiadininkams.
Žemiau pateikiami atsakymai į vadovėlyje suformuluotus klausimus, bet jie rasti naudojant sudėtines išvestines.
Atsakymai. **a)** $5\sqrt{2}\,\text{cm}$; **b)** $2{,}5\sqrt{2}\,\text{cm}$; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

203. Šis uždavinys irgi nelabai tinka bendrajam kursui, tačiau su gabiausiais mokiniais galima panagrinėti tokį sprendimo būdą. Jį galima buvo naudoti ir 202 uždaviniui spręsti.



c) Jei pusė viršutinio pagrindo lygi x, tai aukštinė $h=\sqrt{a^2-x^2}$; trapecijos plotas $S(x)=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$.
Funkcijos reikšmės (trapecijos plotas) yra neneigiami skaičiai, todėl, kai funkcijos kvadrato reikšmė bus didžiausia $x\in[0;a]$, tai ir funkcijos reikšmė yra didžiausia.
$Q(x)=S^2(x)=(a+x)^2(a^2-x^2)$, $Q(x)=-x^4-2ax^3+2a^3x+a^4$;

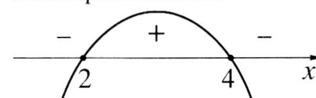
$Q'(x) = -4x^3 - 6ax^2 + 2a^3$,
$-4(x^3 + 1{,}5ax^2 - 0{,}5a^3) = 0$.
Sprendžiame lygtį
$x^3 - 0{,}5ax^2 + 2ax^2 - a^2x + a^2x - 0{,}5a^3 = 0$,
$x^2(x-0{,}5a)+2ax(x-0{,}5a)+a^2(x-0{,}5a) = 0$, $(x-0{,}5a)(x^2+2ax+a^2) = 0$,
$(x - 0{,}5a)(x + a)^2 = 0$,
$x = 0{,}5a$ ir $x = -a$ (netinka pagal prasmę).
$Q(0) = a^4$; $Q(a) = 0$; $Q(0{,}5a) = 1{,}6875a^4$.
Didžiausias plotas, kai viršutinis trapecijos pagrindas lygus a.

Atsakymai. **a)** Pagrindai 10 cm ir 20 cm; **b)** 5 cm ir 10 cm;
c) pagrindai lygūs a ir $2a$.

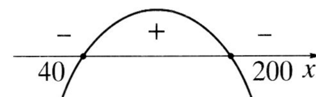
204. Stačiakampio perimetras lygus tvorelės ilgiui 12 m, tai dviejų gretimų stačiakampio kraštinių suma 6 m. Jei viena stačiakampio kraštinė x m, tai antroji turi būti $(6 - x)$ m.
Stačiakampio plotas $S(x) = x(6 - x)$, $S(x) = 6x - x^2$.
Plotas ne mažesnis už 8 m^2, t. y. $6x - x^2 \geqslant 8$.
Nelygybę spręsime pasinaudodami parabolės $y = -x^2 + 6x - 8$ grafiku. Parabolės šakos eina žemyn, o grafikas kerta x ašį, kai $-x^2 + 6x - 8 = 0$,
$x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
a) Nelygybė $6x - x^2 \geqslant 8$ teisinga (sklypo plotas nemažesnis už 8), kai stačiakampio viena kraštinė nemažesnė už 1,3 m ir nedidesnė už 4,7 m, t. y. kai $1{,}3 \leqslant x \leqslant 4{,}7$.
b) Plotas bus didžiausias funkcijos $S(x) = 6x - x^2$ maksimumo taške (parabolės $y = 6x - x^2$ viršūnės taške), $x_0 = \frac{-6}{-2} = 3$.

Atsakymas. Sklypo kraštinės turi būti lygios 3 m.

Pastaba
Punkto a) klausimas turėtų skambėti taip: „Kokio ilgio ***gali*** būti stačiakampio kraštinės?“

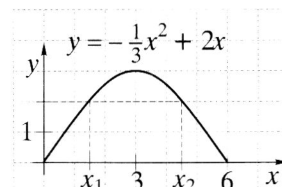


205. **a)** Pelno pokytis didesnis negu 800 Lt, kai $-0{,}1x^2 + 24x > 800$.
Parabolės $y = -0{,}1x^2 + 24x - 800$ šakos eina žemyn, ji kerta x ašį, kai $x_1 = 40$, $x_2 = 200$.
$-0{,}1x^2 + 24x - 800 > 0$, kai $40 < x < 200$. Trąšų reikia nuo 40 kg iki 200 kg.
b) Pelno pokytis bus didžiausias funkcijos $f(x) = -0{,}1x^2 + 24x$ ekstremumo taške (parabolės $y = -0{,}1x^2 + 24x$ viršūnės taške $x = 120$).
Kitaip: $f'(x) = -0{,}2x + 24$, $f'(x) = 0$, kai $-0{,}2x + 24 = 0$, $x = 120$.
c) Kai $x > 120$, funkcijos $f(x) = -0{,}1x^2 + 24x$ išvestinė $f'(x) = -0{,}2x + 24 < 0$, tuomet funkcijos reikšmės (pelnas) mažėja.
Išvada. Didinant trąšų kiekį virš 120 kg hektarui, pelno prieaugis mažės.



Atsakymai. **a)** Nuo 40 kg iki 200 kg; **b)** 120 kg trąšų vienam hektarui; **c)** ne.

206. Nusibraižome parabolę $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$. Ji kerta x ašį, kai $y = 0$ (pylimo aukštis lygus nuliui) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$, $x^2 - 6x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.
Parabolės viršūnės koordinatės $x_0 = -\frac{2}{-\frac{1}{3}} = 3$, $y_0 = 3$, šakos eina žemyn.
a) Pylimo plotis prie pagrindo — tai atstumas tarp taškų x_1 ir x_2. Atstumas tarp x ašies taškų apskaičiuojamas pagal formulę $d = |x_2 - x_1|$, iš čia $d = |6 - 0|$, $d = 6$ m.
Kadangi parabolės šakos nukreiptos žemyn, didžiausia y reikšmė yra parabolės viršūnės taške ir ji lygi $y_0 = 3$ (m).
b) Kai aukštis $y = 1$, $-\frac{1}{3}x^2 + 2x = 1$;
$x^2 - 6x + 3 = 0$, $D = 36 - 12 = 4 \cdot 6$,
$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 3 \pm \sqrt{6}$.
Pylimo plotis $d = |x_2 - x_1|$, $d = \left|3 + \sqrt{6} - (3 - \sqrt{6})\right| = 2\sqrt{6} \approx 4{,}9$ (m).
c) Kai aukštis $y = 2$, $-\frac{1}{3}x^2 + 2x = 2$;
$x^2 - 6x + 6 = 0$, $x_1 = 3 - \sqrt{3}$, $x_2 = 3 + \sqrt{3}$.
Pylimo plotis $d = \left|3 + \sqrt{3} - (3 + \sqrt{3})\right| = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ (m).
Kai aukštis $y = 3$, pylimo plotis $d = 0$. Didesniame nei 2 m aukštyje pylimo plotis $0 \leqslant d < 2\sqrt{3}$.



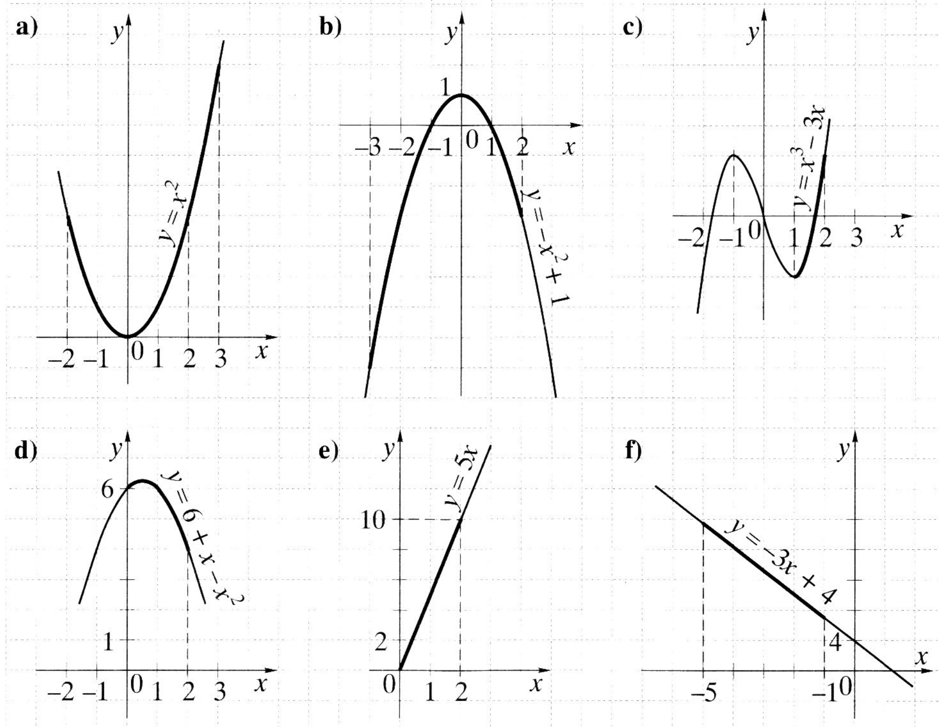
Atsakymai. **b)** 4,9 m; **c)** $0 \leqslant d < 3{,}5$.

207. **c)** $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in [1; 2]$.
1) Randame taškus, kuriuose funkcijos išvestinė $f'(x) = 0$.
$f'(x) = 3x^2 - 3$, $x^2 - 1 = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Taškas $x = -1$ nepriklauso duotajam intervalui.
2) Apskaičiuojame funkcijos reikšmes taške $x = 1$ ir intervalo galo taškuose. $f(1) = -2$, $f(2) = 2$.
3) Iš gautų reikšmių intervale $[1; 2]$ didžiausia yra $f(x) = 2$, kai $x = 2$, mažiausia — $f(x) = -2$, kai $x = 1$.
e) $f(x) = 5x$, $x \in [0; 2]$.
1) $f'(x) = 5 \neq 0$, funkcija ekstremumo taškų neturi, yra didėjanti.
2) Apskaičiuojame funkcijos reikšmes intervalo galuose $f(0) = 0$, $f(2) = 10$.
3) Iš gautų reikšmių intervale $[0, 2]$ didžiausia yra $f(x) = 10$, kai $x = 2$; mažiausia — $f(x) = 0$, kai $x = 0$.

Pastaba
Šiame uždavinyje pavartota sąvoka „tolydi funkcija“. Mokytojai galėtų mokiniams paaiškinti tą sąvoką, pavyzdžiui, taip:
Funkcija, kurios grafiką galima nubraižyti neatitraukus pieštuko nuo lapo, vadinama tolydžia.

Atsakymai. **a)** $\max_{[-2;3]} f(x) = 9$, kai $x = 3$, $\min_{[-2;3]} f(x) = 0$, kai $x = 0$;
b) $\max_{[-3;2]} f(x) = 1$, kai $x = 0$, $\min_{[-3;2]} f(x) = -8$, kai $x = -3$;
c) $\max_{[1;2]} f(x) = 2$, kai $x = 2$, $\min_{[1;2]} f(x) = -2$, kai $x = 1$;
d) $\max_{[0;2]} f(x) = 6{,}25$, kai $x = 0{,}5$, $\min_{[0;2]} f(x) = 4$, kai $x = 2$;
e) $\max_{[0;2]} f(x) = 10$, kai $x = 2$, $\min_{[0;2]} f(x) = 0$, kai $x = 0$;
f) $\max_{[-5;-1]} f(x) = 19$, kai $x = -5$, $\min_{[-5;-1]} f(x) = 7$, kai $x = -1$.

Pastaba
Maksimumus ir minimumus intervale $[a; b]$ galima žymėti taip: $\max_{[a;b]} f(x)$ ir $\min_{[a;b]} f(x)$.



208. **a)** $\max_{[1;2]} f(x) = 0$, kai $x = 0$ ir $x = 2$, $\min_{[-1;2]} f(x) = -3$, kai $x = -1$;
b) $\max_{[-1;2]} f(x) = 14$, kai $x = 2$, $\min_{[-1;2]} f(x) = -4$, kai $x = -1$.

12.4. Geometrijos uždaviniai

Spręsdami šio skyrelio uždavinius mokiniai turėtų prisiminti rombo, lygiašonio ir lygiakraščio trikampių savybes, sinusų, kosinusų teoremas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 209–211.
Vidutinis lygmuo: 212.

209. **a)** 10 (cm); **b)** $S = 76\,\text{cm}^2$; **c)** 7,6 cm; **d)** $73{,}74^0$, $106{,}26^0$;
e) įbrėžto apskritimo spindulys lygus pusei rombo aukštinės $r = 3{,}8\,\text{cm}$.

210. Galima spręsti taip: $\triangle ABD$ — lygiašonis, nes jo aukštinė BE yra ir pusiaukraštinė, tai $BD = AB$ ir $AB = AD$ (rombo kraštinės lygios), tai $\triangle ABD$ lygiakraštis ir visi jo kampai po 60°: $\angle A = 60°$, $\angle B = 120°$.

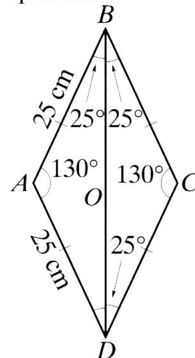
Atsakymas. $\angle A = 60°$; $\angle B = 120°$.

211. **a)** 10 cm; **b)** $10\sqrt{3}\,\text{cm}$; **c)** $50\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Pastaba

Galima pasinaudoti 210 uždavinio sprendimu.

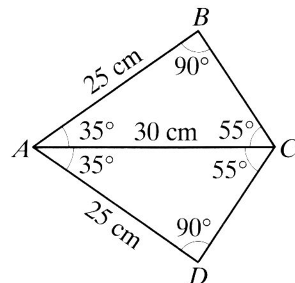
212. **a) 1), 2)** Pavaizduotas keturkampis yra rombas, nes visos jo kraštinės lygios. Rombo įstrižainės dalija kampus pusiau, tai
$\angle ADC = 2\angle ADB$, $\angle ADC = \angle ABC = 50°$,
$\angle DAB = 180° - 50° = 130°$, $\angle BCD = \angle DAB = 130°$.
BD galime apskaičiuoti iš lygiašonio trikampio BAD pagal kosinusų teoremą:
$BD^2 = 25^2 + 25^2 - 2 \cdot 25 \cdot 25 \cdot \cos 130°$.
Kitaip: nubrėžiam antrąją rombo įstrižainę AC, kuri yra statmena BD ir dalija ją pusiau.
Iš stataus $\triangle ADO$:
$\cos\angle ADO = \frac{DO}{AD}$, $DO = 25 \cdot \cos 25°$, $BD = 2 \cdot DO$, $BD = 50 \cdot \cos 25°$,
$BD \approx 45{,}32\,\text{cm}$.
3) Iš stataus $\triangle ADO$:
$\sin\angle ADO = \frac{AO}{AD}$, $AO = 25 \cdot \sin 25°$, $AC = 2 \cdot AO$, $AC = 50 \cdot \sin 25°$,
$AC \approx 21{,}13\,\text{cm}$.
4) $P = 100\,\text{cm}$; $S = 25 \cdot 25 \cdot \sin 50°$, $S \approx 478{,}8\,\text{cm}^2$.



b) 1), 2) Iš brėžinio matome, kad keturkampio kraštinės nelygios, todėl jis nėra rombas.
$\triangle ABC = \triangle ADC$, nes $AB = AD$, AC — bendra, $\angle BAC = \angle CAD$.
Iš $\triangle ABC$ randame BC pagal kosinusų teoremą:
$BC^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \cos 35°$,
$BC = \sqrt{1525 - 1500\cos 35°}$; $BC \approx 17{,}21\,\text{cm}$.
Kampus apskaičiuojame pasinaudodami sinusų teorema:

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{BC}{\sin\angle BAC},$$

$\sin\angle ABC = \frac{30 \cdot \sin 35°}{17{,}21} \approx 1$, $\angle ABC = 90°$, tai
$\angle BCA = 90° - 35° = 55°$, $\angle ACD = 55°$, $\angle B = \angle D = 90°$.
3) $BD = 2BO$, $\sin 35° = \frac{BO}{25}$, $BO = 25 \cdot \sin 35°$, $BD = 50 \cdot \sin 35°$,
$BD \approx 28{,}68\,\text{cm}$.
4) $P = 84{,}42\,\text{cm}$. $S = 2S_{ABC}$, $S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 30 \cdot \sin 35°$, $S = 750 \cdot \sin 35°$,
$S \approx 430{,}2\,\text{cm}^2$.



13. TIKIMYBĖS

13.1. Atsitiktiniai įvykiai

Mokiniai turėtų mokėti rasti:

- bandymo baigčių skaičių;
- įvykiui palankių bandymo baigčių skaičių.

Nagrinėjami bandymai, kurių baigčių skaičius yra nedidelis. Rekomenduojama, kad mokiniai bandymo baigtis ir įvykiui palankias baigtis surašytų, pavaizduotų piešiniu, lentele, schema ar pan. Daugiau dėmesio reikia skirti supratimui — jokios formulės čia nėra reikalingos. Vadovėlyje skyrelio pabaigoje pateiktoje lentelėje parodyti įvairūs būdai, kaip užrašyti bandymo baigtis (elementariuosius įvykius) ir su bandymu susijusių atsitiktinių įvykių baigtis.
Verta atkreipti mokinių dėmesį į vadovėlio 130 psl. pateiktą paaiškinimą apie tai, kuo ypatingi yra bandymai, kuriuos nagrinėja tikimybių teorija.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 220a,b,d, 224, 227, 228.
Vidutinis lygmuo: 220c, 225a,b, 226a.
Aukštesnysis lygmuo: 221–223, 226b.

220. **a)** $E = \{1, 2, 3, 4, \}$.
b) $E = \{h_5h_2; h_5s_2; s_5h_2; s_5h_5\}$. Galima rašyti ir taip: $\{ss, sh, hs, hh\}$, tačiau ne visiems mokiniams būna aišku, kodėl sh ir hs yra skirtingos baigtys. Kai rašome h_5s_2 ir s_5h_2, mokiniams turėtų būti aiškiau.
c) Galima monetas sunumeruoti 1, 2, 3 arba laikyti, kad monetos yra skirtingos, pvz., 1, 2 ir 5 centų vertės. Galimi elementariųjų įvykių aibės užrašymo būdai: $E = \{hhh, hhs, hsh, shh, ssh, shs, hss, sss\}$ arba $E = \{h_1h_2h_5, h_1h_2s_5, h_1s_2h_5, s_1h_2h_5, s_1s_2h_5, h_1s_2s_5, s_1h_2s_5, s_1s_2s_5\}$ ir pan.
d) Šiuo atveju patogesnis būdas — lentelė.

	1	2	3	4	5	6
1	**1**,1	**1**,2	**1**,3	**1**,4	**1**,5	**1**,6
2	**2**,1	**2**,2	**2**,3	**2**,4	**2**,5	**2**,6
3	**3**,1	**3**,2	**3**,3	**3**,4	**3**,5	**3**,6
4	**4**,1	**4**,2	**4**,3	**4**,4	**4**,5	**4**,6
5	**5**,1	**5**,2	**5**,3	**5**,4	**5**,5	**5**,6
6	**6**,1	**6**,2	**6**,3	**6**,4	**6**,5	**6**,6

221. Čia taip pat patogu sudaryti lentelę.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Atsakymai. **a)** Įvykiui A palankūs tie elementarieji įvykiai, kai suma lygi 3, 6, 9, 12, t. y. $A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$;
b) Įvykiui B palankūs įvykiai, kai suma 9, 10, 11, 12, t. y.
$B = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$;
c) Įvykiui C palankūs įvykiai, kai suma 2, 3, 4, 5, t. y.
$C = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$.

Pastaba
Tokiuose uždaviniuose paprastai laikome, kad rodyklė ant ribos, skiriančios sektorius, nesustoja.

Priminkite mokiniams
Sąlygoje pasakyta, kad kauliukai skirtingų spalvų, todėl, pavyzdžiui, įvykiai (1, 2) ir (2, 1) yra skirtingi, nes pirmuoju atveju 1 atvirto ant vienos spalvos kauliuko, o antruoju — ant kitos.

Pastaba
Mokiniams gali kilti klausimas, ar, pvz., įvykiai (1, 2) ir (2, 1) nėra tie patys, juk suma abiem atvejais lygi 3. Reiktų paaiškinti, kad čia svarbi ne tik pati suma, o ir tai, ant kokios spalvos kauliuko kuris skaičius atsivertė. Taip daroma todėl, kad įvykiai sudarantys elementariųjų įvykių aibę būtų vienodai tikėtini, nes tik tokiu atveju galima taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą, kuris pateikiamas 13.2 skyrelyje. Kitoks apibrėžimas vidurinės mokyklos kurse nenagrinėjamas. Tiesa, 245 uždavinyje pateiktas statistinis tikimybės apibrėžimas, bet jis neprivalomas.

Priminkite mokiniams
natūraliojo skaičiaus kartotinio sąvoką.

222. Elementariųjų įvykių aibę pateiksime lentele.

+	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Įvykiui A palankūs yra įvykiai, kai sandauga lygi 2, 3, 5:
$A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1)\}$.
Įvykiui B palankūs elementarieji įvykiai, kai sandauga lygi 1, 4, 9, 16, 25, 36:
$B = \{(1, 1), (2, 2), (1, 4), (4, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

Priminkite mokiniams
pirminio skaičiaus sąvoką, atkreipkite dėmesį, kad 1 nelaikomas nei pirminiu, nei sudėtiniu skaičiumi.

223. Elementariųjų įvykių aibę patogiausia pateikti lentele.

a)

+	3	4	6
2	5	6	8
5	8	9	11

b)

×	3	4	6
2	6	8	12
5	15	20	30

224. Kai pirmasis atverstas skaitmuo 1, galima gauti skaičius 12 ir 13;
kai pirmasis atverstas skaitmuo 2, galima gauti skaičius 21 ir 23;
kai pirmasis atverstas skaitmuo 3, galima gauti skaičius 31 ir 32.

Atsakymas. Galima gauti 6 skaičius: 12, 13, 21, 23, 31, 32.

Priminkite mokiniams
skaitmens ir skaičiaus sąvokas, kokie skaičiai vadinami dviženkliais, triženkliais.

225. Uždavinys sprendžiamas samprotaujant analogiškai kaip ir 224. Galima sudaryti lenteles.

a)

I skaitmuo	II skaitmuo	Skaičius
1	2; 3; 4	12; 13; 14
2	1; 3; 4	21; 23; 24
3	1; 2; 4	31; 32; 34
4	1; 2; 3	41; 42; 43

b)

I skaitmuo	II skaitmuo	III skaitmuo	Skaičius
1	2	3; 4	123; 124
	3	2; 4	132; 134
	4	2; 3	142; 143
2	1	3; 4	213; 214
	3	1; 4	231; 234
	4	1; 3	241; 243
3	1	2; 4	312; 314
	2	1; 4	321; 324
	4	1; 2	341; 342
4	1	2; 3	412; 413
	2	1; 3	421; 423
	3	1; 2	431; 432

Atsakymai. **a)** 12 skaičių; **b)** 24 skaičiai.

226. Sprendžiant šį uždavinį svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad 0 negali būti pirmuoju skaitmeniu. Taip pat, kad šį uždavinį prašoma išspręsti dviem atvejais — kai skaitmenys skaičiuje kartojasi ir kai nesikartoja.
a) *I atvejis.* Skaitmenys skaičiuje kartojasi.

I skaitmuo	II skaitmuo	Skaičius
1	0; 1; 2	10; 11; 12
2	0; 1; 2	20; 21; 22

II atvejis. Skaitmenys skaičiuje nesikartoja.

I skaitmuo	II skaitmuo	Skaičius
1	0; 2	10; 12
2	0; 1	20; 21

b) *I atvejis*. Skaitmenys skaičiuje kartojasi.

I skaitmuo	II skaitmuo	III skaitmuo	Skaičius
1	0	0; 1; 2	100; 101; 102
	1	0; 1; 2	110; 111; 112
	2	0; 1; 2	120; 121; 122
2	0	0; 1; 2	200; 201; 202
	1	0; 1; 2	210; 211; 212
	2	0; 1; 2	220; 221; 222

II atvejis. Skaitmenys skaičiuje nesikartoja.

I skaitmuo	II skaitmuo	III skaitmuo	Skaičius
1	0; 2	2; 0	102; 12
2	0; 1	1; 0	201; 210

Atsakymai. **a)** 6 skaičiai, 4 skaičiai; **b)** 18 skaičių; 4 skaičiai.

227. Pasižymėkime: p — pataikė, n — nepataikė.
a) $\{(pp), (pn), (np), (nn)\}$;
b) $\{(ppp), (ppn), (pnp), (pnn), (npp), (npn), (nnp), (nnn)\}$.

228. Atsakymus patogu pateikti lentele.

	ž	g	m
r	rž	rg	rm
b	bž	bg	bm
j	jž	jg	jm

13.2. Įvykio tikimybė

Mokiniams primenamas iš pagrindinės mokyklos kurso žinomas klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas, kurį jie turi žinoti ir mokėti naudoti. Reiktų labiau akcentuoti, kad šį apibrėžimą galima taikyti tik tada, kai bandymo baigtys (elementarieji įvykiai) yra vienodai galimos.
Jei uždavinio sąlygoje atsitiktinis įvykis nepažymėtas didžiąja raide, reiktų, kad mokiniai tą padarytų sprendimo pradžioje, kaip nurodyta vadovėlio 137 p. išspręstuose uždaviniuose.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 229–232, 234, 240–243.
Vidutinis lygmuo: 233, 237–239, 244.
Aukštesnysis lygmuo: 235, 236, 245.

229. a) 1) Įvykis A — atsitiktinai paskirtas į maršrutą autobusas bus naujo modelio.
2) Parke iš viso yra 280 autobusų, tai visų galimų bandymo baigčių skaičius $n = 280$.
3) Kadangi yra 40 naujo modelio autobusų, tai įvykiui A palankių baigčių skaičius $m = 40$.
4) Tikimybė, kad atsitiktinai į maršrutą paskirtas autobusas bus naujo modelio, lygi: $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{40}{280} = \frac{1}{7}$.
b) 1) B — atsitiktinai paskirtas į maršrutą autobusas bus seno modelio.
2) $n = 280$.
3) $m = 280 - 40 = 240$.
4) $\mathbf{P}(B) = \frac{240}{280} = \frac{6}{7}$.

Atsakymai. **a)** $\frac{1}{7}$; **b)** $\frac{6}{7}$.

Pastaba
Patartina, kad mokiniai sprendimus rašytų panašiai, kaip parodėme a) dalyje, t. y. rašytų ir paaiškinimus bei samprotavimus. Toliau kai kur tai praleisime.

230. a) Pasižymime įvykį A — Laura atsitiktinai paėmė pyragaitį su aguonomis, $n = 6 + 8 + 4 = 18$, $m = 6$, $\mathbf{P}(A) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.
b) B — Laura atsitiktinai paėmė pyragaitį su razinomis, $n = 18$, $m = 8$, $\mathbf{P}(B) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$.
c) C — Laura atsitiktinai paėmė pyragaitį su saulėgrąžomis, $n = 18$, $m = 4$, $\mathbf{P}(C) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.
d) D — Laura atsitiktinai paėmė pyragaitį su aguonomis arba su razinomis, $n = 18$, $m = 6 + 8 = 14$, $\mathbf{P}(D) = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$.
e) E — Laura atsitiktinai paėmė pyragaitį su razinomis arba su saulėgrąžomis, $n = 18$, $m = 8 + 4 = 12$, $\mathbf{P}(E) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Atsakymai. **a)** $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{4}{9}$; **c)** $\frac{2}{9}$; **d)** $\frac{7}{9}$; **e)** $\frac{2}{3}$.

231. a) Pasižymime įvykį A — iš pirmos dėžės ištrauktas baltas rutulys, $n = 18 + 15 + 13 = 46$, $m = 18$, $\mathbf{P}(A) = \frac{18}{46} = \frac{9}{23}$.
B — iš pirmos dėžės ištrauktas raudonas arba juodas rutulys, $n = 46$, $m = 15 + 13 = 28$, $\mathbf{P}(B) = \frac{28}{46} = \frac{14}{23}$.
C — iš pirmos dėžės ištrauktas ne raudonas rutulys (t. y. baltas arba juodas), $n = 46$, $m = 46 - 15 = 31$ (arba $18 + 13 = 31$), $\mathbf{P}(C) = \frac{31}{46}$.
D — iš antros dėžės ištrauktas baltas rutulys, $n = 12 + 16 = 28$, $m = 12$, $\mathbf{P}(D) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$.
E — iš antros dėžės ištrauktas juodas rutulys, $n = 28$, $m = 0$, kadangi antroje dėžėje juodų rutulių nėra, $\mathbf{P}(E) = \frac{0}{28} = 0$.
b) Tikimybė iš pirmos dėžės ištraukti baltą rutulį $\mathbf{P}(A) = \frac{9}{23}$, o iš antros $\mathbf{P}(D) = \frac{3}{7}$. Palyginkime šių įvykių tikimybes:
$\mathbf{P}(A) = \frac{9}{23} = \frac{9 \cdot 7}{23 \cdot 7} = \frac{63}{23 \cdot 7}$; $\mathbf{P}(D) = \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 23}{7 \cdot 23} = \frac{69}{7 \cdot 23}$.
Kadangi $69 > 63$, tai $\frac{3}{7} > \frac{9}{23}$, t. y. $\mathbf{P}(D) > \mathbf{P}(A)$. Todėl geriau rinktis antrąją dėžę, nes tikimybė ištraukti baltą rutulį iš antros dėžės yra didesnė. Žinoma, tai negarantuoja žaidimo laimėjimo.

Atsakymai. **a)** $\mathbf{P}(A) = \frac{9}{23}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{14}{23}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{31}{46}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{3}{7}$, $\mathbf{P}(E) = 0$; **b)** antrąją.

Pastaba
Čia įvykiai pažymėti raidėmis, bet patarkite mokiniams juos perrašyti.

232. $E = \{ss, hs, sh, hh\}$; $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}$ (palankus įvykis ss), $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}$ (palankus įvykis hh), $\mathbf{P}(C) = \frac{3}{4}$ (palankūs įvykiai ss, hs, sh).

233. Elementriųjų įvykių yra 8.

Bandymo baigtys	$h_{10}h_{20}h_{50}$	$h_{10}h_{20}s_{50}$	$h_{10}s_{20}s_{50}$	$h_{10}s_{20}h_{50}$	$s_{10}h_{20}h_{50}$	$s_{10}h_{20}s_{50}$	$s_{10}s_{20}h_{50}$	$s_{10}s_{20}s_{50}$
Atvirtusių centų suma	0	50	70	20	10	60	30	80

Atsakymai. $\mathbf{P}(A) = \frac{5}{8}$ (palankūs įvykiai, kai suma lygi 50, 70, 60, 80, 30),
$\mathbf{P}(B) = \frac{2}{8} = 14$ (palankūs įvykiai, kai suma lygi 30 ir 60),
$\mathbf{P}(C) = \frac{5}{8}$ (palankūs įvykiai, kai suma lygi 0, 50, 20, 10, 30),
$\mathbf{P}(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (palankūs įvykiai, kai suma lygi 50, 70, 60, 80).

234. Galima surašyti visų elementariųjų įvykių aibę, tuomet bus lengviau nustatyti palankius nagrinėjamam įvykiui elementariuosius įvykius:
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$.

Atsakymai.
a) $\mathbf{P}(A) = \frac{9}{25}$, nes pirminiai skaičiai yra devyni: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23;
b) $\mathbf{P}(B) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$, sudėtinių skaičių yra: 25 − 9(pirminiai) − 1(vienetas) = 15;
c) $\mathbf{P}(C) = \frac{9}{25}$, nes vienaženklių skaičių yra devyni: 1, 2, ..., 9;
d) $\mathbf{P}(D) = \frac{16}{25}$, nes dviženklių skaičių yra 25 − 9 = 16;
e) $\mathbf{P}(E) = \frac{0}{25} = 0$, nes nuo 1 iki 25 nėra triženklių skaičių;
f) $\mathbf{P}(F) = \frac{12}{25}$, nes dalių iš dviejų yra 12 skaičių (25 : 2 = 12,5);
g) $\mathbf{P}(G) = \frac{8}{25}$, nes dalūs iš 3 yra 8 skaičiai ($25 : 3 = 8\frac{1}{3}$);
h) $\mathbf{P}(H) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, nes dalūs iš 5 yra 5 skaičiai (25 : 5 = 5).

Priminkite mokiniams kaip nustatyti, kiek aibėje 1, 2, ..., N yra skaičių dalių iš n, o taip pat dalumo iš 2, 3, 5 požymius.

235. Elementariuosius įvykius surašome į lentelę.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

Atsakymai. **a)** A — atvirtusių akučių suma lygi 7: $\mathbf{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;
b) B — atvirtusių akučių suma mažesnė už 7: $\mathbf{P}(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$;
c) C — atvirtusių akučių suma didesnė už 7: $\mathbf{P}(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$;
d) C — atvirtusių akučių suma yra lyginis skaičius: $\mathbf{P}(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$;
e) E — atvirtusių akučių suma yra pirminis skaičius (skaičiai 2, 3, 5, 7, 11):
$\mathbf{P}(E) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$;
f) E — atvirtusių akučių suma yra natūraliojo skaičiaus kvadratas (4,9):
$\mathbf{P}(F) = \frac{7}{36}$.

236. Elementariųjų įvykių aibę surašome lentele.

Priminkite mokiniams lyginio ir nelyginio skaičiaus sąvokas.

+	1	3	5	7
2	3	5	7	9
3	4	6	8	10

a) A — skaičių suma yra nelyginis skaičius: $\mathbf{P}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (skaičiai 3, 5, 7, 9);
b) B — skaičių suma yra ne didesnė už 6: $\mathbf{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (suma 3, 4, 5, 6).

×	1	3	5	7
2	2	6	10	14
3	3	9	15	21

c) C — skaičių sandauga yra lyginis skaičius: $\mathbf{P}(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (skaičiai 2, 6, 10, 14);
d) D — skaičių sandauga yra ne mažesnė už 7: $\mathbf{P}(D) = \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$ (skaičiai 9, 10, 14, 15, 21).

Atsakymai. **a)** $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{5}{8}$.

237.

I skaitmuo	II skaitmuo	Skaičius
2	4; 5; 6	24; 25; 26
4	2; 5; 6	42; 45; 46
5	2; 4; 6	52; 54; 56
6	2; 4; 5	62; 64; 65

Iš viso 12 skaičių, tai $n = 12$.
$\mathbf{P}(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

238. 1) a) Kai skaitmenys nesikartoja: 12, 13, 21, 23, 31, 32;
b) kai skaitmenys kartojasi: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.
2) a) Kai skaitmenys nesikartoja: $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
kai skaitmenys kartojasi: $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
b) Kai skaitmenys nesikartoja: $\mathbf{P}(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
kai skaitmenys kartojasi: $\mathbf{P}(D) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
c) Kai skaitmenys nesikartoja: $\mathbf{P}(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
kai skaitmenys kartojasi: $\mathbf{P}(F) = \frac{4}{9}$.

239. 1) Kai skaitmenys nesikartoja: 10, 12, 20, 21;
2) kai skaitmenys gali kartotis: 10, 11, 12, 20, 21, 22.
a) A_1 — atsitiktinai iš 1) sąrašo parinktas skaičius dalijasi iš 2: $\mathbf{P}(A_1) = \frac{3}{4}$;
A_2 — atsitiktinai iš 2) sąrašo parinktas skaičius dalijasi iš 2: $\mathbf{P}(A_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
b) B_1 — atsitiktinai iš 1) sąrašo parinktas skaičius dalijasi iš 5: $\mathbf{P}(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;
B_2 — atsitiktinai iš 2) sąrašo parinktas skaičius dalijasi iš 5: $\mathbf{P}(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
c) C_1 — atsitiktinai iš 1) sąrašo parinktas skaičius dalijasi iš 10: $\mathbf{P}(C_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;
C_2 — atsitiktinai iš 2) sąrašo parinktas skaičius dalijasi iš 10: $\mathbf{P}(C_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
d) D_1 — atsitiktinai iš 1) sąrašo parinktas skaičius dalijasi ir iš 2, ir iš 3: $\mathbf{P}(D_1) = \frac{1}{4}$.
D_2 — atsitiktinai iš 2) sąrašo parinktas skaičius dalijasi ir iš 2, ir iš 3: $\mathbf{P}(D_2) = \frac{1}{6}$.

240. Sudarome galimų skaičų lentelę.

I skaitmuo	II skaitmuo	III skaitmuo	Skaičius
1	2	3	123
	3	2	132
2	1	3	213
	3	1	231
3	1	2	312
	2	1	321

Iš viso 6 skaičiai, tai $n = 6$.
Atsakymai. **a)** $\mathbf{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (A — skaičiai didesni už 200: 213, 231, 312, 321); **b)** $\mathbf{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (B — skaičiai, kurie prasideda lyginiu ir baigiasi nelyginiu skaitmeniu: 213, 231); **c)** $\mathbf{P}(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (C — skaičiai, kurie prasideda ir baigiasi nelyginiu skaitmeniu: 123, 321).

241. 1) a) Negali; **b)** negali; **2)** $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$.

242. a) $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{17} = \frac{15}{17}$; **b)** $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$;
c) $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - 0 = 1$.

243. Įvykis A — lemputė perdegs per mėnesį, priešingas įvykis $\bar{A}$ — lemputė neperdegs per mėnesį.
Atsakymas. $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - 0{,}13 = 0{,}87$.

244. Vienas kitam priešingi yra įvykiai A ir E; B ir C; A ir D.
$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, tai $\mathbf{P}(E) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$;
$\mathbf{P}(B) = \frac{8}{25} = \frac{1}{5}$, tai $\mathbf{P}(C) = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25}$;
$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{5}$, tai $\mathbf{P}(D) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

245. Šis uždavinys supažindina su statistiniu įvykio tikimybės apibrėžimu.
Galima pasiūlyti atlikti ir kitokius eksperimentus: daug kartų mesti kauliuką ir įvertinti, pvz., 6 akučių atsivertimo tikimybę ar pan.
Ši medžiaga mokiniams nėra privaloma, bet besidomintiems matematika suteikia galimybę plačiau pažvelgti į tikimybių teoriją.

13.3. Rinkiniai

Šiame skyrelyje aptariami įvairūs rinkinių skaičiavimo būdai — surašymas; galimybių medis; daugybos taisyklė. Jie visi žinomi iš pagrindinės mokyklos. 13.1 skyrelyje daugiau dėmesio skiriama rinkinių surašymui. 13.3 skyrelyje parodoma, kad tą patį uždavinį galima spręsti įvairiais būdais. Mokiniams verta parodyti visus būdus, bet spręsdami jie galėtų rinktis tą, kurį geriausiai supranta. Daugiau dėmesio skiriama daugybos taisyklės taikymui. Verta priminti, kad daugybos taisyklė taikoma, kai:

1) rinkinį sudarantys elementai imami iš skirtingų aibių (žr. užd. 247);
2) rinkinį sudarantys elementai imami iš tos pačios aibės, bet yra svarbi elementų išdėstymo tvarka rinkinyje (žr. užd. 248).

Kai rinkinį sudarantys elementai imami iš tos pačios aibės, bet nesvarbi jų išdėstymo tvarka rinkinyje, taikoma daugybos taisyklė su dalyba — dalijama iš rinkinį sudarančių elementų sutvarkymų skaičiaus (žr. užd. 257).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 246–252, 257–261.
Vidutinis lygmuo: 253–256, 263–265.
Aukštesnysis lygmuo: 262, 266.

246. **a)** 12; **b)** 8; **c)** $12 + 8 = 20$; **d)** $12 \cdot 8 = 96$.

Pastaba
Dalyje d) taikoma daugybos taisyklė, nes sudaromi obuolių ir kriaušių „rinkiniai" (t. y. rinkinį sudarantys elementai imami iš skirtingų aibių).

247. **a)** $2 \cdot 3 = 6$; **b)** $6 \cdot 3 = 18$; **c)** $3 \cdot 5 = 15$; **d)** $5 \cdot (2 + 3) = 25$.

248. **a)** $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$; **b)** $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$; **c)** $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

249. **a)** $3! = 6$; **b)** $4! = 24$; **c)** $5! = 120$.

Priminkite mokiniams
skaičiaus faktorialo sąvoką:
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

250. **a)** 15!; **b)** 20!; **c)** 30!.

251. **a)** $3! = 6$; **b)** $4! = 24$; **c)** 15!.

Pastaba
Čia svarbi tvarka, nes statant lentynoje skirtingas knygas, gaunamas skirtingas „vaizdas".

252. **a)** $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; **b)** $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$; **c)** $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$; **d)** $100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$.

253.

I vieta	II vieta	III vieta	Pasiskirstymas
Ž	J	B	ŽJB
	B	J	ŽBJ
J	Ž	B	JŽB
	B	Ž	JBŽ
B	Ž	J	BŽJ
	J	Ž	BJŽ

Atsakymas. Iš viso yra 6 būdai.

254. I vietą gali užimti bet kuri iš 4 plaukikių, tada II-ąją — bet kuri iš 3 likusių, o III-iąją — bet kuri iš dviejų likusių, todėl būdų skaičius yra $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Atsakymas. 24.

255. **a)** $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$; **b)** $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$.

256. Aišku, kad sudarant skaičius, yra svarbi skaitmenų tvarka.

1) Nagrinėjame atvejį, kai skaitmenys skaičiuje nesikartoja.

a) I-ąjį skaitmenį galima parinkti 3 skirtingais būdais, II-ąjį — 2, III-ąjį — 1, todėl: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Analogiškai samprotaujame, spręsdami **b)**, **c)**, **d)** dalis.

e) Kadangi 0 negali būti pirmuoju skaitmeniu, tai pirmąjį skaitmenį parinkti yra 3 būdai; parinkti antrąjį skaitmenį taip pat yra 3 būdai, nes juo gali būti ir 0; trečiąjį skaitmenį galima parinkti 2 būdais. Gauname: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

Atsakymai. **a)** 6; **b)** 24; **c)** 120; **d)** 504; **e)** 18; **f)** 48; **g)** 648.

2) Nagrinėjame atvejį, kai skaitmenys skaičiuje gali kartotis. Tada kiekvienu atveju pasirinkti antrąjį ir trečiąjį skaičių yra tiek pat galimybių, kaip ir pirmąjį.

Atsakymai. **a)** $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$; **b)** $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; **c)** $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$; **d)** $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; **e)** $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$; **f)** $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$; **g)** $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Pastaba
Sprendžiant e–g dalis reikia atkreipti dėmesį, kad 0 negali būti pirmuoju skaitmeniu.

257. Sprendžiant šį uždavinį taikome daugybos taisyklę su dalyba, nes rinkinį sudarantys elementai imami iš tos pačios aibės ir jų (šiuo atveju skirtingų duonos rūšių) išdėstymo tvarka rinkinyje nesvarbi.

Atsakymai. **a)** $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$; **b)** $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$.

258. Renkamės iš vienos aibės (žaidimų), todėl tvarka nesvarbi.

Atsakymai. **a)** $\frac{15\cdot 14}{2!} = 105$; **b)** $\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3!} = 455$; **c)** $\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4!} = 1365$; **d)** $\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{5!} = 3003$; **e)** $\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10!} = 3003$.

259. **a)** 12; **b)** $\frac{12\cdot 11}{2!} = 66$; **c)** $\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3!} = 220$; **d)** $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!} = 495$; **e)** $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{8!} = 495$; **f)** 1.

260. Samprotauti galima taip: žaidžia po du žaidėjus (t. y. sudarome rinkinį iš dviejų elementų), kur tvarka nesvarbi, nes vienas su kitu žaidėjai žaidžia vieną kartą.

Atsakymai. **a)** $\frac{6\cdot 5}{2!} = 15$; **b)** $\frac{8\cdot 7}{2!} = 28$; **c)** $\frac{10\cdot 9}{2!} = 45$; **d)** $\frac{15\cdot 14}{2!} = 105$.

261. **a)** Situacija analogiška užd. 260. Randame $\frac{20\cdot 19}{2!} = 190$.
b) Čia galimas ir toks samprotavimas — kiekvienas iš 20 mokinių išdalina po 19 nuotraukų (visiems, išskyrus save), todėl išdalyta $20 \cdot 19 = 380$ nuotraukų.

Atsakymai. **a)** 190; **b)** 380.

262. **a)** $\frac{12\cdot 11}{2!} = 66$; **b)** $\frac{14\cdot 13}{2!} = 91$; **c)** $\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3!} = 220$; **d)** $\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4!} = 1001$;
e) $12 \cdot 14 = 168$ (šiuo atveju naudojamės tik daugybos taisykle, nes renkamės iš skirtingų aibių: merginų ir vaikinų);
f) $66 \cdot 91 = 6006$ (pasinaudojame šio uždavinio **a)** ir **b)** dalies rezultatais);
g) $220\cdot 1001 = 220\,220$ (pasinaudojame šio uždavinio **c)** ir **d)** dalies rezultatais);
h) $12 \cdot 1001 = 12\,012$ (pasinaudojame šio uždavinio **d)** dalies rezultatais).

263. **a)** Čia svarbi tvarka, elementai — iš tos pačios aibės, tai $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$.
b) Kai pirmoji raidė parinkta, tai likusias korteles dėliojame $5! = 120$ būdų.
c) Parinktos dvi raidės, dėliojame likusias $4! = 24$ būdų.
d) Įvykis A — atsitiktinai iš sudarytų rinkinių parinktas raidžių šešetas sudarys žodį MONETA. Iš **a)** dalies turime, kad $n = 720$. Kadangi tik vienu atveju gausis žodis MONETA, tai $m = 1$ ir $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{720}$.
e) Įvykis B — atsitiktinai iš sudarytų rinkinių parinktas raidžių šešetas prasidės raide M. Vėl $n = 720$, o iš **b)** dalies $m = 120$, tai $\mathbf{P}(B) = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$.
f) Įvykis C — atsitiktinai iš sudarytų rinkinių parinktas raidžių šešetas prasidės raide M, o pasibaigs raide A. Vėl $n = 720$, o iš c) dalies $m = 24$, tai $\mathbf{P}(C) = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$.

Atsakymai. **a)** 720; **b)** 120; **c)** 24; **d)** $\frac{1}{720}$; **e)** $\frac{1}{6}$; **f)** $\frac{1}{30}$.

Pastaba

d)–f) dalyse naudojamas klasikinis tikimybės apibrėžimas $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}$.

264. Punktuose a)–c) tvarka nesvarbi, objektai iš tos pačios aibės.
a) $\frac{20\cdot 19}{2!} = 190$; **b)** $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ (laimingų bilietų yra 5);
c) kadangi nelaimingų bilietų yra $20 - 5 = 15$, tai $\frac{15\cdot 14}{2!} = 105$;
d) $5 \cdot 15 = 75$ (čia taikėme tik daugybos taisyklę, nes rinkinį sudarančius elementus imame iš skirtingų aibių — laimingų ir nelaimingų bilietų);
e) Iš **a)** dalies $n = 190$, iš **b)** dalies $m = 10$, tai $\mathbf{P}(A) = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$;
iš **c)** dalies $m = 105$, tai $\mathbf{P}(B) = \frac{105}{190} = \frac{21}{38}$;
iš **d)** dalies $m = 75$, tai $\mathbf{P}(C) = \frac{75}{190} = \frac{15}{38}$.

Atsakymai. **a)** 190; **b)** 10; **c)** 105; **d)** 75; **e)** $\frac{1}{19}$; $\frac{21}{38}$; $\frac{15}{38}$.

265. **a)** Galima sudaryti lentelę. Iš viso yra 16 skirtingų skaičių.

	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

b) 8 (12, 14, 22, 24, 32, 34, 42, 44); **c)** 5 (12, 21, 24, 33, 42);
d) iš b) dalies $m = 8$, tai $\mathbf{P}(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$; iš c) dalies $m = 5$, tai $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{16}$.

Atsakymai. **a)** 16; **b)** 8; **c)** 6; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** $\frac{5}{16}$.

266. Iš viso galimybių ištraukti 2 kubelius yra $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$.
Galimybių ištraukti 2 raudonus kubelius yra $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$, todėl $\mathbf{P}(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.
Galimybių ištraukti 2 baltus kubelius yra $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$, tai $\mathbf{P}(B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.
Galimybių ištraukti vieną raudoną, o kitą baltą kubelį yra $6 \cdot 4 = 24$, tai $\mathbf{P}(C) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.

Atsakymas. $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{8}{15}$.

13.4. Nepriklausomi įvykiai

Šio skyrelio medžiaga yra nauja. Mokiniai turėtų išmokti:

- *atpažinti* nepriklausomus įvykius;
- *pateikti* tokių įvykių pavyzdžių;
- *apskaičiuoti* nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybę.

Įvykių sankirta atskirai nėra nagrinėjama, tiesiog sakoma, kad tai įvykis „A ir B“, vadovėlyje sankirtos ženklas $\cap$ nevartojamas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 267–272.
Vidutinis lygmuo: 273–279, 281, 282.
Aukštesnysis lygmuo: 280.

267. Atsakymai kai kuriais atvejais gali būti nevienareikšmiški. Čia svarbu, kaip mokiniai pagrindžia savo nuomonę, t. y. ar teisingai pritaiko įvykių nepriklausomumo sąvoką. Pavyzdžiui:

Įvykis A	Įvykis B	Ar įvykiai A ir B nepriklausomi?
Pirmadienį pavėlavau į autobusą	Antradienį pavėlavau į autobusą	Nepriklausomi, nes pirmadienio pavėlavimas neturi įtakos antradienio pavėlavimui
Šiandien pavėlavau į autobusą	Šiandien pavėlavau į mokyklą	Priklausomi, nes jei pavėlavau būtent į tą autobusą, kuriuo vykdavau į mokyklą, tai tas turi įtakos tikimybei pavėluoti į mokyklą.

268. Pažymėkime įvykius:
A_1 — moneta atsivertė herbu;
A_2 — lošimo kauliukas atvirto šešiomis akutėmis.
Įvykiai A_1 ir A_2 yra nepriklausomi, o įvykis A įvyksta, kai įvyksta abu įvykiai A_1 ir A_2, t. y. $A = A_1$ ir A_2, tada $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 \text{ ir } A_2) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.
B_1 — lošimo kauliukas atsivertė nelyginiu akučių skaičiumi. Įvykiai A_1 ir B_1 nepriklausomi, todėl:
$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 \text{ ir } B_1) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$.
C_1 — moneta atsivertė skaičiumi;
C_2 — lošimo kauliukas atvirto akučių skaičiumi, daliu iš 3.
Įvykiai C_1 ir C_2 nepriklausomi, todėl:
$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(C_1 \text{ ir } C_2) = \mathbf{P}(C_1) \cdot \mathbf{P}(C_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.
Atsakymai. $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$.

Pastaba
Šį uždavinį galima išspręsti dviem būdais — nesinaudojant įvykių nepriklausomumu arba naudodajantis, kaip parodyta vadovėlio p. 149 išspręstame pavyzdyje. Pateiktuose sprendimuose naudojamasi įvykių nepriklausomumu, nes toks yra šio skyrelio tikslas.

269. Pasižymime įvykius:
A_1 — moneta atvirto herbu;
A_2 — moneta atvirto skaičiumi.
Atsakymai. $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

270. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$; $\mathbf{P}(D) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$.

271. $\mathbf{P}(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$;
$\mathbf{P}(D) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

Pastaba
Sprendžiant uždavinius 270–282, nagrinėjamo įvykio neskaidome į dviejų įvykių sankirtą. Manome, kad tą bus nesunku padaryti, kaip parodyta, sprendžiant uždavinius 268–269.

272. $\mathbf{P}(A) = \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{12} = \frac{2}{7}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{6}{14} \cdot \frac{3}{12} = \frac{3}{28}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{0}{14} \cdot \frac{3}{12} = 0$;
$\mathbf{P}(D) = \frac{6}{14} \cdot \frac{3}{12} = \frac{3}{28}$; $\mathbf{P}(E) = \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{12} = \frac{2}{7}$.

273. Pasižymime įvykius:
A — pirmosios loterijos bilietas yra laimingas;
B — antrosios loterijos bilietas yra laimingas.
Atsakymai. **a)** $\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}03 \cdot 0{,}05 = 0{,}0015$;
b) $\mathbf{P}(\bar{A} \text{ ir } \bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) = 0{,}97 \cdot 0{,}95 = 0{,}921$.

274. $\mathbf{P}(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$; $\mathbf{P}(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$;
$\mathbf{P}(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$; $\mathbf{P}(D) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$.

275. Pasižymime įvykius:
A — Asta savaitgalį aplanko tėvus;
B — Albinas savaitgalį aplanko tėvus.

Atsakymai. **a)** $\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$;
b) $\mathbf{P}(\bar{A} \text{ ir } \bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

276. Pasižymime įvykius:
A — per mėnesį perdegs pirmoji lemputė;
B — per mėnesį perdegs antroji lemputė.

Atsakymai. **a)** $\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}14 \cdot 0{,}2 = 0{,}028$;
b) $\mathbf{P}(\bar{A} \text{ ir } \bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) = 0{,}86 \cdot 0{,}8 = 0{,}688$.

277. Pasižymime įvykius:
A — studentas išlaikys istorijos egzaminą;
B — studentas išlaikys geografijos egzaminą.

Atsakymai. **a)** $\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{45}{50} \cdot \frac{40}{60} = \frac{3}{5}$;
b) $\mathbf{P}(\bar{A} \text{ ir } \bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{5}{50} \cdot \frac{20}{60} = \frac{1}{30}$.

278. Pasižymime įvykius:
A — pirmas šaulys pataiko į taikinį;
B — antras šaulys pataiko į taikinį;
C — trečias šaulys pataiko į taikinį.

Atsakymai. **a)** $\mathbf{P}(A \text{ ir } B \text{ ir } C) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}54$;
b) $\mathbf{P}(\bar{A} \text{ ir } \bar{B} \text{ ir } \bar{C}) = \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \cdot \mathbf{P}(\bar{C}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}005$;
c) $\mathbf{P}(A \text{ ir } \bar{B} \text{ ir } \bar{C}) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \cdot \mathbf{P}(\bar{C}) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}045$;
d) $\mathbf{P}(A \text{ ir } B \text{ ir } \bar{C}) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(\bar{C}) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}18$.

279. Detalė bus pagaminta gerai, kai bus tinkamai atliktos visos 3 operacijos, todėl: $0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}65 = 0{,}274625$.

Atsakymas. $0{,}274625$.

280. **a)** Jei Benas pradėjo žaidimą po pirmo bandymo, tai jis pirmuoju bandymu išmetė 6 akutes, o tikimybė išmesti 6 akutes lygi $\frac{1}{6}$.
b) Jei Benas pradėjo žaidimą po antrojo bandymo, tai pirmuoju bandymu iškrito koks nors akučių skaičius (išskyrus 6), o antruoju 6, tai $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.
c) Samprotaujame analogiškai kaip b): $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$.

Atsakymai. **a)** $\frac{1}{6}$; **b)** $\frac{5}{36}$; **c)** $\frac{25}{216}$.

281. **a)** $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$; **b)** $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{8000}$; **c)** $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{160\,000}$.

282. **a)** $(0{,}15)^3 = 0{,}003375$; **b)** $(0{,}85)^3 = 0{,}614125$.

13.5. Nesutaikomi įvykiai

Mokiniai turėtų išmokti:

- atpažinti nesutaikomus įvykius ir pateikti tokių įvykių pavyzdžių;
- apskaičiuoti nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybę.

Kaip ir nagrinėjant nepriklausomų įvykių sankirtą, nesutaikomų įvykių sąjunga nėra nagrinėjama, sakoma, kad tai yra įvykis „A arba B“. Vadovėlyje sąjungos ženklas „∪“ taip pat nėra naudojamas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 283–288.
Vidutinis lygmuo: 289–291, 293–294, 296, 298–299.
Aukštesnysis lygmuo: 292, 295, 297.

283. **a)** Įvykiai nesutaikomi, nes atliekant bandymą jie negali įvykti kartu;
b) nesutaikomi dėl tos pačios kaip ir a) priežasties;
c) sutaikomi, nes 2 ir 4 yra lyginiai skaičiai, todėl įvykus įvykiui A, gali įvykti ir B;
d) sutaikomi, nes galėjo būti ištrauktas kryžių tūzas;
e) sutaikomi, nes yra viena baigtis, palanki abiems įvykiams — „ištrauktas būgnų karalius“.
f) nesutaikomi, nes nėra nei vienos baigties, palankios abiems įvykiams;
g) sutaikomi, nes įvykus įvykiui A, įvykis B įvyksta garantuotai.

Atsakymai. **a)**, **b)**, **f)** — nesutaikomi; **c)**, **d)**, **e)**, **g)** — sutaikomi.

284. **a)** $\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9$;
b) $\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 0{,}8 + \frac{1}{15} = \frac{4}{5} + \frac{1}{15} = \frac{13}{15}$;
c) $\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{14} + \frac{3}{7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$;
d) $\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 0{,}125 + \frac{7}{8} = 0{,}125 + 0{,}875 = 1$.

285. **d)** Kadangi A ir B — nesutaikomi įvykiai, tai
$\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}4$;
e) Kadangi A ir C — nesutaikomi, tai
$\mathbf{P}(A \text{ arba } C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C) = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$;
f) Kadangi B ir C — nesutaikomi,
tai $\mathbf{P}(B \text{ arba } C) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) = 0{,}15 + 0{,}5 = 0{,}65$;
g) kadangi tikimybė ištraukti raudoną rutulį lygi 0,1, tai tikimybė ištraukti ne raudoną gali būti apskaičiuojama pasinaudojus priešingų įvykių tikimybės savybe: $1 - 0{,}1 = 0{,}9$;
h) jei ištrauktas ne raudonas ir ne žalias, tai ištrauktas rutulys yra baltas arba mėlynas, todėl $\mathbf{P}(A \text{ arba } C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C) = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$.

Atsakymai. **a)** 0,25; **b)** 0,15; **c)** 0,5; **d)** 0,4; **e)** 0,75; **f)** 0,65; **g)** 0,9; **h)** 0,75.

Pastaba
Reiktų pataisyti uždavinio sąlygą: jei dėžėje yra tik nurodytų spalvų rutuliai, tai tikimybių ištraukti tų spalvų rutulius suma turi būti lygi 1. Todėl pakeiskime, kad **P** (ištrauktas mėlynas rutulys) $= \mathbf{P}(C) = 0{,}5$. Atsakymai pateikti jau su pataisyta sąlyga.

286. $\mathbf{P}(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$;
$\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{11}{30}$.

287. Kadangi kiekvienos rūšies kortų yra po keturias:
$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.
Kadangi kiekvienos spalvos kortų yra po šešias:
$\mathbf{P}(D) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(E) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(F) = 1 - \frac{4}{24} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$.
A ir B — nesutaikomi, tai:
$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
D ir E — nesutaikomi, tai:
$\mathbf{P}(H) = \mathbf{P}(D \text{ arba } E) = \mathbf{P}(D) + \mathbf{P}(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
Įvykiai A, C ir B — nesutaikomi, tai:
$\mathbf{P}(I) = \mathbf{P}(A \text{ arba } C \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Atsakymai. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$.

288. **a)** A — Simas laimės 50 litų: $\mathbf{P}(A) = \frac{5}{300} = \frac{1}{60}$;
b) B — Simas laimės 10 litų: $\mathbf{P}(B) = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$;
c) C — Simas laimės 5 litus: $\mathbf{P}(C) = \frac{30}{300} = \frac{1}{10}$;
d) D — Simas laimės 2 litus: $\mathbf{P}(D) = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}$;
e) E — Simas nieko nelaimės.
Nelaiminčių bilietų yra $300 - 5 - 20 - 30 - 40 = 205$, todėl $\mathbf{P}(E) = \frac{205}{300} = \frac{41}{60}$;
f) F — Simas laimės daugiau nei 5 litus, t. y., laimės 10 arba 50 litų:
$\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(B \text{ arba } A) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A) = \frac{20}{300} + \frac{5}{300} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}$;

g) G — Simas laimės ne mažiau kaip 5 litus, t. y., laimės 5, 10 arba 50 litų:
$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(C \text{ arba } B \text{ arba } A) = \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60} = \frac{11}{60}$;
h) H — Simas laimės ne daugiau kaip 10 litų, t. y., laimės 10, 5 arba 2 litus:
$\mathbf{P}(H) = \mathbf{P}(B \text{ arba } C \text{ arba } D) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(D) = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{7}{30}$;
i) I — Simas laimės kokią nors pinigų sumą. Šis įvykis yra priešingas įvykiui E — „nieko nelaimės“, todėl $\mathbf{P}(I) = 1 - \mathbf{P}(E) = 1 - \frac{41}{60} = \frac{19}{60}$.

Atsakymai. **a)** $\frac{1}{60}$; **b)** $\frac{1}{15}$; **c)** $\frac{1}{10}$; **d)** $\frac{1}{150}$; **e)** $\frac{41}{60}$; **f)** $\frac{1}{12}$; **g)** $\frac{11}{60}$; **h)** $\frac{13}{75}$; **i)** $\frac{19}{60}$.

289. Sudarome sumų lentelę.

+	1	2	3	4	5	**6**
1	2	3	4	5	**6**	7
2	3	4	5	**6**	7	8
3	4	5	**6**	7	8	9
4	5	**6**	7	8	9	10
5	**6**	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{36}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{36}$;
$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Atsakymai. $\frac{4}{36}$; $\frac{5}{36}$; $\frac{1}{4}$.

290. Sudarome sandaugų lentelę.

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	**12**
3	3	6	9	**12**	15	18
4	4	8	**12**	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	**12**	18	24	30	36

$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{36}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{11}{36}$,
$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$,
$\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(B \text{ arba } C) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) = \frac{1}{36} + \frac{11}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$,
$\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(A \text{ arba } C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C) = \frac{4}{36} + \frac{11}{36} = \frac{15}{36}$.

Atsakymai. $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{15}{36}$.

291. $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{5}$,
$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{2}$.

292. Apskaičiuokime, kiek yra būdų ištraukti 2 korteles iš 15. Tvarka čia nesvarbi, todėl iš viso skirtingų galimybių ištraukti 1 kortelę iš 15 yra 15, vieną iš likusių 14 — 14, todėl iš viso bus $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ būdai.
Sumą 10 gausime, kai ištrauksime poras: 1 ir 9; 2 ir 8; 3 ir 7; 4 ir 6 (keturiais atvejais). Todėl $\mathbf{P}(A) = \frac{4}{105}$.
Sumą 20 gausime, kai ištrauksime poras: 5 ir 15; 6 ir 14; 7 ir 13; 8 ir 12; 9 ir 11 (penkiais atvejais). Todėl $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{105} = \frac{1}{21}$.
Sumą, mažesnę už 15, gausime šiais atvejais:

Viena kortelė	Antra kortelė	Iš viso atvejų
1	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13	12
2	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	10
3	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	8
4	5, 6, 7, 8, 9, 10	6
5	6, 7, 8, 9	4
6	7, 8	2
		42

Taigi, $\mathbf{P}(C) = \frac{42}{105} = \frac{2}{5}$.
Sumą, ne didesnę už 15 (t. y., $\leqslant 15$) gausime visais prieš tai išvardytais 42 atvejais ir dar 7 atvejais: 1 ir 14; 2 ir 13; 3 ir 12; 4 ir 11; 5 ir 10; 6 ir 9; 7 ir 8. Iš viso 49, tai $\mathbf{P}(D) = \frac{49}{105} = \frac{7}{15}$.
Įvykis A arba B: ištrauktų skaičių suma lygi 10 arba 20.
$\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{4}{105} + \frac{5}{105} = \frac{9}{105} = \frac{3}{35}$.

Atsakymai. $\frac{4}{105}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{3}{35}$.

293. Apskaičiuokime, kiek tarp skaičių nuo 1 iki 64 yra dalių iš penkių. Kadangi $64:5=12{,}8$, vadinasi yra 12 tokių skaičių: $\mathbf{P}(A)=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$.
Apskaičiuojame, kiek yra dalių iš 13 skaičių: $64:13\approx 4{,}92$. Tokių skaičių yra 4, todėl $\mathbf{P}(B)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$.

Atsakymai. $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$.

294. Uždavinį sprendžiame samprotaudami panašiai kaip ir 293 uždavinyje.
Kadangi $200:13=15{,}4$, tai yra 15 skaičiaus 13 kartotinių nuo 1 iki 200, todėl $\mathbf{P}(A)=\frac{15}{200}=\frac{3}{40}$.
Kadangi $200:20=10$, tai yra 10 skaičiaus 20 kartotinių nuo 1 iki 200, todėl $\mathbf{P}(B)=\frac{10}{200}=\frac{1}{20}$. Įvykiai A ir B nesutaikomi.
$\mathbf{P}(C)=\mathbf{P}(A \text{ arba } B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\mathbf{B})=\frac{15}{200}+\frac{10}{200}=\frac{25}{200}=\frac{1}{8}$.

Atsakymai. $\frac{3}{40}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{8}$.

295. Iš viso natūraliųjų dviženklių skaičių $(10, 11, \ldots, 99)$ yra $9\cdot 10=90$ (taikyta daugybos taisyklė).
11 kartotinių yra 9 (juos nesunku ir užrašyti 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99).
17 kartotinių yra 5 (17, 34, 51, 68, 85).
Pasižymime įvykius:
A — skaičius yra 11 kartotinis; B — skaičius yra 17 kartotinis.
$\mathbf{P}(A \text{ arba } B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)=\frac{9}{90}+\frac{5}{90}=\frac{14}{90}=\frac{7}{45}$.

Atsakymas. $\frac{7}{45}$.

296. **a)** Dėžėje iš viso yra $3+5+6=14$ saldainių. Galimybių paimti 3 saldainius yra $\frac{14\cdot 13\cdot 12}{3!}=364$.
Galimybių paimti 3 juodojo šokolado saldainius yra 1, todėl $\mathbf{P}(A)=\frac{1}{364}$.
b) Galimybių paimti 3 baltojo šokolado saldainius yra $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}=10$, tai $\mathbf{P}(B)=\frac{10}{364}=\frac{5}{182}$.
c) Galimybių paimti 3 pieniško šokolado saldainius yra $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}=20$, tai $\mathbf{P}(C)=\frac{20}{364}=\frac{5}{91}$.
d) Galimybių paimti 2 juodojo ir 1 baltojo šokolado saldainį yra $\frac{3\cdot 2}{2!}\cdot 5=15$, tai $\mathbf{P}(D)=\frac{15}{364}$.
e) Galimybių paimti 2 pieniško šokolado saldainius ir 1 baltojo yra $\frac{6\cdot 5}{2!}\cdot 5=75$, tai $\mathbf{P}(E)=\frac{75}{364}$.

Atsakymai. **a)** $\frac{3}{364}$; **b)** $\frac{5}{182}$; **c)** $\frac{5}{91}$; **d)** $\frac{15}{364}$; **e)** $\frac{75}{364}$.

297. **a)** A — abu išimti rutuliai yra balti. Visų baigčių skaičius yra $n=36\cdot 36=1296$.
Užduotį tenkinančių baigčių skaičius yra $m=15\cdot 15=225$. Todėl $\mathbf{P}(A)=\frac{225}{1296}=\frac{25}{144}$.
Analogiškai samprotaujant, randame kitas tikimybes.

Atsakymai. **a)** $\frac{25}{144}$; **b)** $\frac{49}{144}$; **c)** $\frac{35}{144}$.

298. A — moteris yra prie I mašinos, B — prie II, C — prie III, D — prie IV.
$\mathbf{P}(A)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$, $\mathbf{P}(B)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(C)=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$, $\mathbf{P}(D)=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$.
a) $\mathbf{P}(A \text{ arba } C)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(C)=\frac{1}{5}+\frac{3}{20}=\frac{7}{20}$;
b) $\mathbf{P}(B \text{ arba } D)=\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(D)=\frac{3}{10}+\frac{7}{20}=\frac{13}{20}$;
c) $\mathbf{P}(A \text{ arba } B \text{ arba } D)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(D)=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{7}{20}=\frac{17}{20}$;
d) $\mathbf{P}(A \text{ arba } B \text{ arba } C \text{ arba } D)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)+\mathbf{P}(D)=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{7}{20}=1$.

Atsakymai. **a)** $\frac{7}{20}$; **b)** $\frac{13}{20}$; **c)** $\frac{17}{20}$; **d)** 1.

299. Pasižymime įvykius:
A — klientui išmokėta visa draudimo suma; B — klientui išmokėta dalinė suma; C — klientui nieko neišmokėta.
a) $\mathbf{P}(A)=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$; **b)** $\mathbf{P}(B)=\frac{20}{1000}=\frac{1}{50}$;
c) $\mathbf{P}(A \text{ arba } B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)=\frac{1}{100}+\frac{1}{50}=\frac{3}{100}$;
d) $\mathbf{P}(C)=1-\mathbf{P}(A \text{ arba } B)=1-\frac{3}{100}=\frac{97}{100}$.

Atsakymai. **a)** $\frac{1}{100}$; **b)** $\frac{1}{50}$; **c)** $\frac{3}{100}$; **d)** $\frac{97}{100}$.

Priminkite mokiniams

Kiekvieną kartą, kai sprendžiant sutinkami nesutaikomi įvykiai, reikia patikrinti įvykių nesutaikomumą. Pavyzdžiui, šiuo atveju įvykiai A ir B yra nesutaikomi, nes tarp skaičių dalių iš 5, nėra dalių iš 13. Galima mokinių paprašyti pateikti ir sutaikomų įvykių pavyzdžių. Pavyzdžiui, įvykis A — kodas yra dalus iš 5 skaičius ir įvykis C — kodas dalus iš 15, yra sutaikomi ir formulė $\mathbf{P}(A \text{ arba } C)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(C)$ čia jau negaliotų.

Pastaba

Šio uždavinio situacija gali būti mokiniams sunkiau suprantama. Ligi šiol mes nenagrinėjome situacijos, kai ištrauktas rutulys grąžinamas atgal į dėžę. Galima paaiškinti, kad ji analogiška tokiai, kai traukiama po vieną rutulį iš skirtingų dėžių, kuriuose yra tokie patys rutuliai.

Pastaba

Uždaviniuose 298–299 taikomas statistinis įvykio tikimybės apibrėžimas.

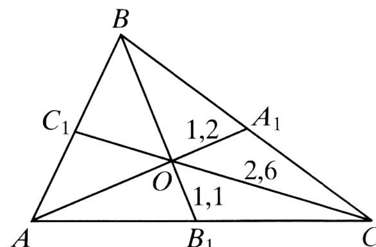
13.6. Geometrijos uždaviniai

Šiame skyrelyje kartojamos uždavinių, kai duotas dydžių santykis, sprendimas. Galima naudoti tiek algebrinį (įvedant nežinomąjį, sudarant lygtį), tiek aritmetinį (apskaičiuojant vienos santykio dalies vertę aritmetiškai, nesudarant lygties) būdą. Be to, reikia žinoti trikampio pusiaukraštinių savybę, rombo, lygiašonės trapecijos savybes bei kampų, gautų dvi lygiagrečias tieses perkirtus trečiąja, savybes.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 300, 302, 304.1.
Vidutinis lygmuo: 301.
Aukštesnysis lygmuo: 304.2.

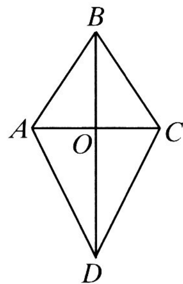
300. Brėžinyje nurodyti dviejų pusiaukraštinių trečdaliai ir vienos — $\frac{2}{3}$.



1) $BB_1 = 3 \cdot OB_1 = 3 \cdot 1{,}1 = 3{,}3$;
2) $AA_1 = 3 \cdot OA_1 = 3 \cdot 1{,}2 = 3{,}6$;
3) Šiuo atveju, pirmiau reikia rasti, kam lygus trečdalis: $C_1O = \frac{CO}{2} = \frac{2{,}6}{2} = 1{,}3$. Tada galima atkarpų ilgius sudėti: $CC_1 = CO + OC_1 = 2{,}6 + 1{,}3 = 3{,}9$, arba elgtis kaip anksčiau: $CC_1 = 3 \cdot OC_1 = 3 \cdot 1{,}3 = 3{,}9$.

Atsakymas. $AA_1 = 3{,}6$, $BB_1 = 3{,}3$, $CC_1 = 3{,}9$.

301.

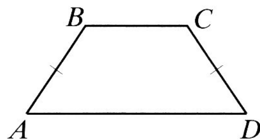


Duota, kad $\frac{\angle OBA}{\angle OAB} = \frac{7}{11}$.
Vieną santykio dalį pažymėkime x. Tada $\angle OBA = 7x$, $\angle OAB = 11x$.
Kadangi $\triangle AOB$ yra status, tai:
$7x + 11x = 90$, $18x = 90$, $x = 5$.
Todėl $\angle OBA = 7 \cdot 5 = 35°$; $\angle OAB = 11 \cdot 5 = 55°$.
Kadangi rombo įstrižainės yra jo kampų pusiaukampinės, tai:
$\angle ABC = \angle ADC = 2 \cdot 35° = 70°$, $\angle BAC = \angle BCD = 2 \cdot 55° = 110°$.

Atsakymas. 70°, 110°, 70°, 110°.

Priminkite mokiniams
Rombo savybes:
1. Rombo kraštinės lygios.
2. Rombo priešingi kampai lygūs.
3. Rombo kampų, esančių prie vienos kraštinės, suma lygi 180°.
4. Rombo įstrižainės kertasi stačiu kampu ir dalijasi susikirtimo taške pusiau.
5. Rombo įstrižainės rombo kampus dalija pusiau.

302.

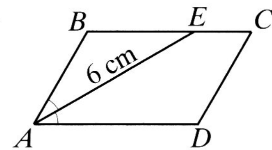


Duota, kad $\frac{\angle A}{\angle B} = \frac{2}{2{,}5}$.
Vieną santykio dalį pažymime x, tai $\angle A = 2x$; $\angle B = 2{,}5x$.
Kadangi $\angle A + \angle B = 180°$, tai $2x + 2{,}5x = 180$; $4{,}5x = 180$; $x = 40°$.
$\angle A = 2 \cdot 40° = 80°$; $\angle B = 2{,}5 \cdot 40° = 100°$.
$\angle C = \angle A = 80°$; $\angle D = \angle B = 100°$.

Atsakymas. 80°, 100°, 80°, 100°.

Priminkite mokiniams
Trapecijos savybes:
1. Trapecijos kampų, esančių prie vienos šoninės kraštinės, suma lygi 180°.
2. Lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo lygūs.

303.



Duota, kad $\frac{BE}{EC} = 3$.
$\angle AEB = \angle EAD$ (vidaus priešiniai kampai), tai $\triangle ABE$ — lygiašonis, kurio $AB = BE$. Vieną santykio dalį pažymime x, tai $BE = 3x$, $EC = x$, $AB = BE = 3x$.
Kadangi $P_{\triangle ABE} = 14\,\text{dm}$, tai:
$3x + 3x + 6 = 14$, $6x = 14 - 6$, $6x = 8$, $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.
Gavome, kad $AB = BE = 4$.
$P_{ABCD} = 2(3x + 4x) = 14x = 14 \cdot \frac{4}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}\,(\text{dm}^2)$.

Atsakymas. $18\frac{2}{3}\,(\text{dm}^2)$.

Priminkite mokiniams
Kampų, gautų 2 lygiagrečias tieses perkirtus trečiaja, savybes:
1. Priešiniai kampai lygūs:
$\angle 3 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 5$.
2. Atitinkamieji kampai lygūs:
$\angle 1 = \angle 5$; $\angle 3 = \angle 7$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 8$.
3. Vidaus vienašalių kampų suma lygi 180°:
$\angle 3 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 6 = 180°$.

304. Turime, kad $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$.
Vieną santykio dalį pažymime x, tai $\angle A = x$, $\angle B = 2x$, $\angle C = 3x$.
Sprendžiame lygtį: $x + 2x + 3x = 180$, $6x = 180$, $x = 30$.
Tada $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$.
Iš to išplaukia, kad $\triangle ABC$ — status. Ilgiausioji jo kraštinė $AB = 12\,\text{cm}$ yra įžambinė.
Statinis prieš 30° kampą lygus pusei įžambinės: $CB = \frac{12}{2} = 6\,\text{cm}$.
Toliau galima spręsti įvairiai — taikyti Pitagoro teoremą ir apskaičiuoti AC arba taikyti formulę $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C$.
Pritaikykime šią formulę:
$S_\triangle = \frac{1}{2}BC \cdot AB \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin 60° = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$.
Atsakymai. **1)** 30°, 60°, 90°; **2)** $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

14. STATISTIKA

14.1. Duomenų rinkimas

Generalinę aibę (arba populiaciją) ne visada lengva nusakyti, dažnai būna sunku įvertinti jos dydį. Kuo populiacija didesnė, tuo sunkiau tą padaryti. Populiacijos nustatymas — pirmasis žingsnis renkant duomenis. Dažniausiai duomenys renkami ne iš visų populiacijos narių, bet tik iš jos dalies, vadinamos imtimi, kuri turi būti reprezentatyvi, kad padarytos išvados apie populiaciją būtų patikimos. Sprendžiant pateiktus pratimus, svarbu, kad mokiniai suprastų ir teisingai naudotų generalinės aibės, imties ir reprezentatyvios imties sąvokas, suprastų, kaip naudojant atsitiktinių skaičių lenteles (arba skaičiuoklį) sudaroma atsitiktinė imtis.

Mokiniai turėtų:

- *suvokti ir paaiškinti* generalinės aibės (populiacijos) ir imties sąvokas;
- *suprasti*, kaip paimama reprezentatyvioji imtis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 314, 316, 318.
Vidutinis lygmuo: 315.
Aukštesnysis lygmuo: 317.

314. Užduotyje nekalbama apie imties reprezentatyvumą, bet reikėtų, kad mokiniai bandytų nusakyti būtent reprezentatyvią atsitiktinę imtį. Vadovėlyje pateiktoje teorinėje dalyje yra keletas paaiškinimų, kaip sudaryti reprezentatyvią imtį. Jais mokiniai ir turėtų remtis. Mokinių pateikti atsakymai nebūtinai turi visiškai sutapti su čia siūlomais. Svarbiausia, kad jie skirtų populiacijos ir imties sąvokas, pademonstruotų supratimą apie imties reprezentatyvumą.

	Populiacija	Imtis
a)	Visi Lietuvos 10 klasių mokiniai	Kelių (atsitiktinai iš sąrašo parinktų) Lietuvos kaimų, miestelių, vidutinių miestų ir didžiųjų miestų mokyklų 10 klasės (nebūtinai visos, jei jų yra daug). Be to, gali būti atrenkami ne visi tos klasės mokiniai, o tik keletas iš jų (pavyzdžiui, kas trečias).
b)	Visi Lietuvos paaugliai	Imtis sudaroma panašiai kaip ir a) atveju.
c)	Visi rinkimų teisę turintys Lietuvos gyventojai (galima aptarti, kad tai nėra lengvai nustatomas dydis, rinkėjų sąrašų sudarymas yra komplikuotas — dalis gyventojų nedeklaruoja gyvenamosios vietos, nėra patikimos apskaitos ir pan.)	Imtis sudaroma panašiai kaip ir a) atveju, tik čia dar reikia atsižvelgti į rinkėjų amžių.
d)	Visi Lietuvoje gyvenantys žmonės nuo 4 metų amžiaus.	Imtis sudaroma panašiai kaip ir c) atveju.
e)	Visi Lietuvoje dirbantys pardavėjai.	Sudarant imtį, reiktų atsižvelgti į vietovės, kuriose dirba pardavėjai, dydį (kaip a) atveju), imti skirtingų prekybos tinklų atstovus ir pan.
f)	Nagrinėjamais metais Vilniuje parduotos knygos.	Keliuose Vilniaus knygynuose ir kitose knygų prekybos vietose parduotos knygos; pasirinkti reikėtų iš skirtingų miesto vietų.

315. a) Teiginys apibūdina nagrinėjamų metų Lietuvos abiturientų populiaciją; surinkta informacija apie visus laikiusius abitūros egzaminus.
b) Apibūdinama nagrinėjamų metų Lietuvos gimnazijos abiturientų populiacija; renkant informaciją sudaryta imtis (nusako žodis „maždaug“).
c) Teiginys apibūdina Vilniaus miesto abiturientų populiaciją; nusakytas visos populiacijos dydis.
d) Teiginys apibūdina sergančius žmones Prancūzijoje, Amerikoje ir Šiaurės Europoje; surinkta visa informacija apie susirgusius tuose regionuose.
e) Kadangi čia yra viešosios nuomonės tyrimo rezultatas, tai populiacija galėjo būti suaugę Lietuvos žmonės (18 metų ir vyresni), sudaryta imtis.
f), g) Populiacija — vyresni nei 4 metų Lietuvos gyventojai; sudaryta imtis.

316. Apskaičiuojame atsakymo lygmenį.

a) Vyrų — $\frac{7546}{15\,000} \approx 0{,}5$; moterų — $\frac{7960}{1700} \approx 0{,}5$.

Kadangi tiek vyrų, tiek moterų atsakymo lygmuo apytiksliai lygus 0,5, tai tyrimui negresia neatsakymo iškreiptis.

b) Miestai — $\frac{13\,065}{25\,000} \approx 0{,}5$; miesteliai — $\frac{4950}{8000} \approx 0{,}6$; kaimai — $\frac{4897}{10\,000} \approx 0{,}5$.

Paaiškinimas, kaip ir a) atveju — neiškreips.

Atsakymai. **a)** ne; **b)** ne.

317. Mokytojui reiktų patikrinti, ar mokiniai teisingai apibūdino populiaciją, ar atsitiktinai parinko imtį, ar imtis reprezentatyvi ir panašiai.

318. Uždavinys sprendžiamas, kaip aprašyta vadovėlio 166 puslapyje.

Atsakymai.

a) 66, 10, 43, 25, 158, 91, 52, 111, 40, 106, 69, 131, 36, 46, 195, 123, 63, 113, 189, 59;

b) 66, 10, 43, 25, 158, 91, 52, 111, 40, 106, 69, 131, 36, 46, 195, 123, 63, 113, 189, 59, 142, 98, 141, 133, 197, 116, 80, 90, 117, 134.

Pastaba

Šį uždavinį mokiniai turėtų spręsti ilgesnį laiką. Tai gali būti projektinis darbas, kuris pasitarnautų ir mokyklai. Jei mokykla nedidelė, galima organizuoti visų mokinių apklausą.

Galima keisti užduotį ir apsiriboti vienos ar kelių klasių tyrimu. Jei mokykla didelė, reikia sudaryti atsitiktinę imtį.

Išnagrinėjus kitų skyrelių medžiagą, duomenis galima sutvarkyti, pavaizduoti grafiškai, apskaičiuoti kai kurias skaitines charakteristikas ir pan.

14.2. Grafinis duomenų vaizdavimas

Mokiniai turėtų mokėti:

- *grupuoti* duomenis, sudaryti imties dažnių lentelę;
- *nubraižyti* imties diagramą ar histogramą.

Skyrelyje pateikiama mokiniams jau žinoma medžiaga. Atkreipiamas dėmesys, kada patogiau braižyti stulpelinę diagramą, o kada histogramą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 319–323, 325.
Vidutinis lygmuo: 324, 326, 327.
Aukštesnysis lygmuo: 328, 329.

319. a)

10^a kl.

Pažymys	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis	1	2	2	2	6	6	4	4	3
Santykinis dažnis	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$

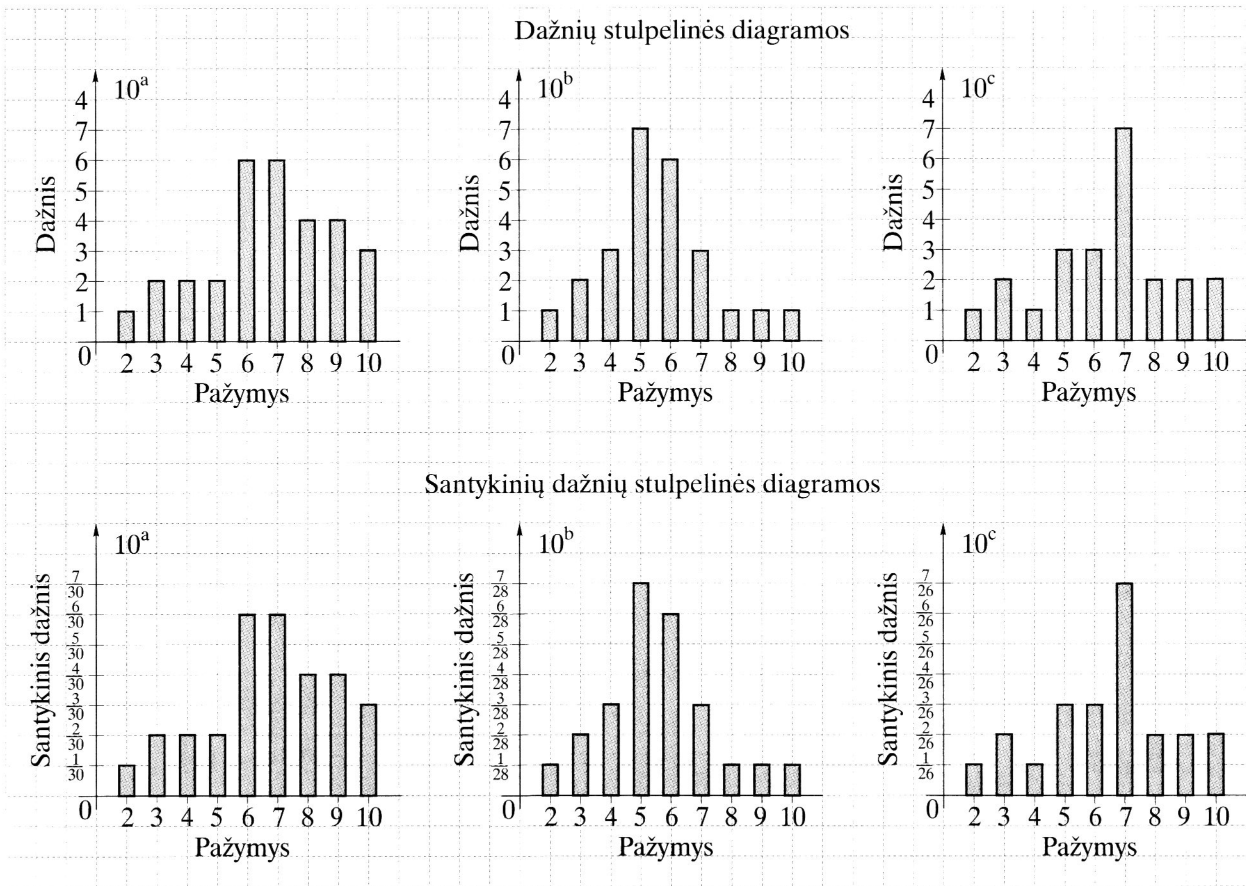
10^b kl.

Pažymys	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis	1	2	3	7	6	3	4	1	1
Santykinis dažnis	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

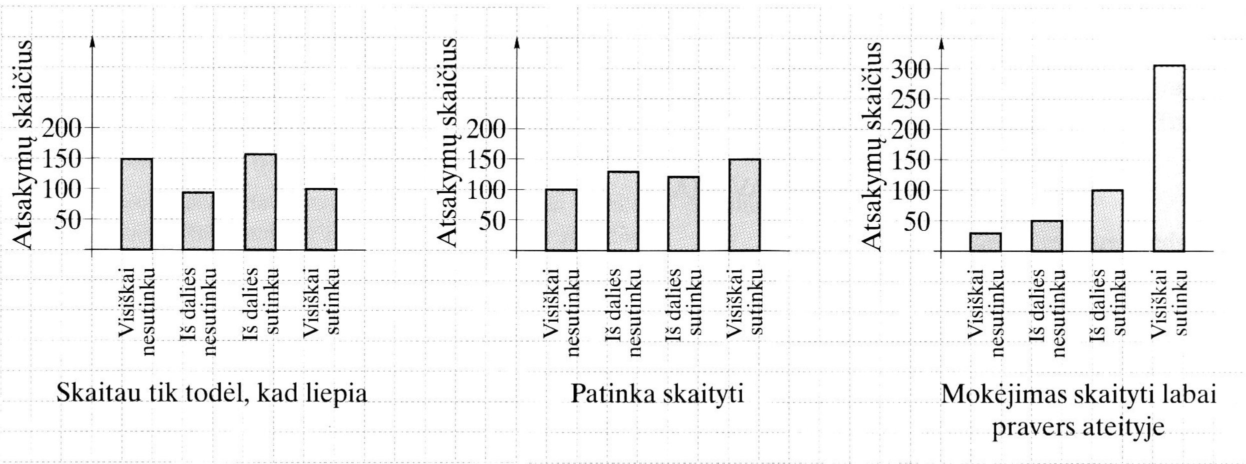
10^c kl.

Pažymys	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis	1	2	1	3	3	5	7	2	2
Santykinis dažnis	$\frac{1}{26}$	$\frac{2}{26}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{2}{26}$	$\frac{2}{26}$

b)



320.



321. Sudarome lentelę.

Vaikų skaičius	1	2	3	4
Dažnis (vnt.)	200	245	105	50
Išpjovos kampo dydis	$0{,}6° \cdot 200 = 120°$	$0{,}6° \cdot 245 = 147°$	$0{,}6° \cdot 105 = 63°$	$0{,}6° \cdot 50 = 30°$

Galima atskirai apskaičiuoti, kokio dydžio kampas atitiks vieną duomenį. Iš viso duomenų yra $200 + 245 + 105 + 50 = 600$, tai vieną duomenį atitiks: $\frac{360°}{600} = 0{,}6°$ dydžio išpjovos kampas.

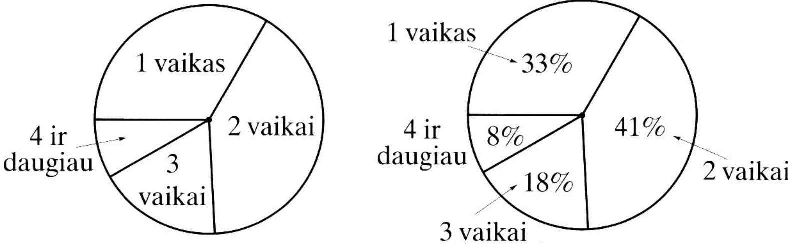
Pastaba

1% atitinka $\frac{360°}{100} = 3{,}6°$ dydžio išpjovos kampas.

Sudarome procentinę lentelę.

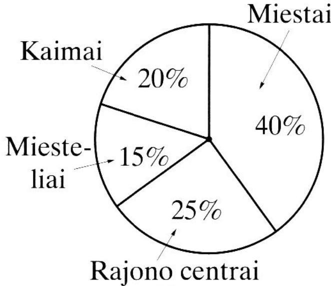
Vaikų skaičius	1	2	3	4
Dažnis (%)	$\frac{200}{600} \cdot 100\% \approx 33{,}3\%$	$\frac{245}{600} \cdot 100\% \approx 40{,}8\%$	$\frac{105}{600} \cdot 100\% \approx 17{,}5\%$	$\frac{50}{600} \cdot 100\% \approx 8{,}3\%$
Išpjovos kampo dydis	$33{,}3 \cdot 3{,}6° = 120°$	$40{,}8 \cdot 3{,}6° = 147°$	$17{,}5 \cdot 3{,}6° = 63°$	$8{,}3 \cdot 3{,}6° = 30°$

Atsakymas.



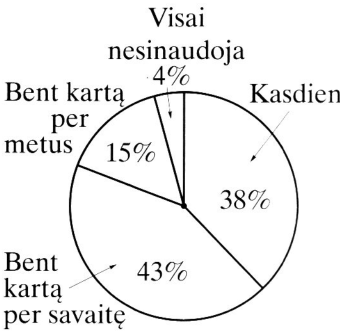
322.

Gyvenamoji vieta	Miestai	Rajono centrai	Miesteliai	Kaimai
Dažnis %	40	25	15	20
Išpjovos kampo dydis	$40 \cdot 3{,}6 = 144°$	$25 \cdot 3{,}6 = 90°$	$15 \cdot 3{,}6 = 54°$	$20 \cdot 3{,}6 = 72°$



323.

Kaip dažnai naudojasi internetu	Kasdien	Bent kartą per savaitę	Bent kartą per mėnesį	Visai nesinaudoja
Dažnis (%)	38	43	15	4
Išpjovos kampo dydis	$38 \cdot 3{,}6 \approx 137°$	$43 \cdot 3{,}6 \approx 155°$	$15 \cdot 3{,}6 = 54°$	$4 \cdot 3{,}6 \approx 14°$



324. Iš spręstų uždavinių mokiniai jau įsitikino, kad braižant tiek dažnių, tiek procentinių dažnių skritulines diagramas, išpjovos kampo dydis yra toks pats. Todėl galima sudaryti tokią lentelę.

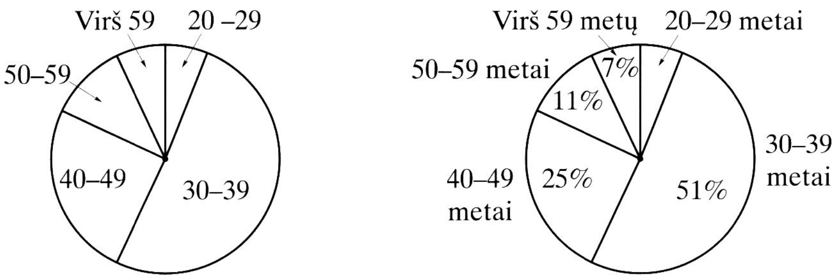
Iš viso darbuotojų yra $60 + 540 + 270 + 120 + 70 = 1060$.

Pastaba

Reiktų koreguoti šio uždavinio sąlygą — histogramos nebraižyti, kadangi neaiškus paskutiniojo intervalo ilgis.

Amžius	20–29	30–39	40–49	50–59	virš 59
Darbuotojų skaičius	60	540	270	120	70
Išpjovos kampo didumas	$\frac{360}{1060} \cdot 60 \approx 20°$	$\frac{360}{1060} \cdot 540° \approx 183°$	$\frac{360}{1060} \cdot 270 = 92°$	$\frac{360}{1060} \cdot 120° \approx 41°$	$\frac{360}{1060} \cdot 70° = 24°$
Darbuotojų skaičius (%)	6%	51%	25%	11%	7%

Atsakymas.

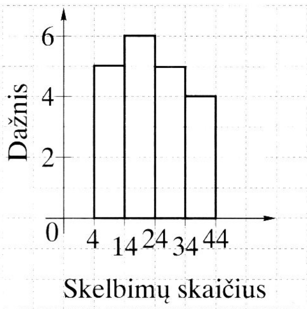


325. Sugrupavę duomenis į nurodytus intervalus, braižome histogramą.

Atkreipkite mokinių dėmesį, kad horizontalioje ašyje nebūtina pradėti žymėti nuo 0, žymime nuo pirmojo intervalo pradžios.

Atsakymas.

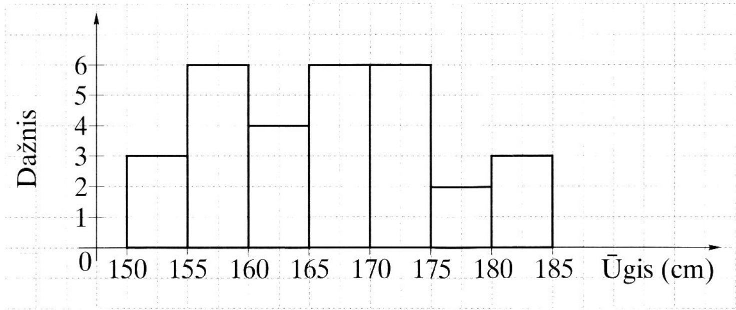
Intervalas	[4; 14)	[14; 24)	[24; 34)	[34; 44)
Dažnis	5	6	5	4



326. Mažiausias iš duomenų yra 150, taigi pirmasis intervalas bus [150; 155); didžiausias — 182, tai paskutinis intervalas [180; 185).

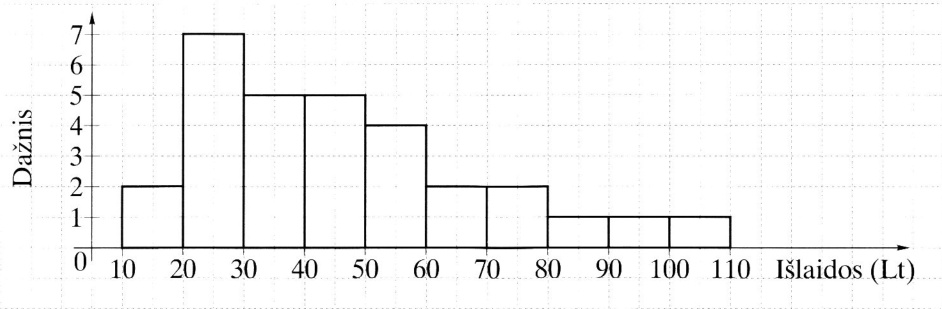
Atsakymas.

Ūgis	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)
Dažnis	3	6	4	6	6	2	3



327.

Intervalas	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)
Dažnis	2	7	5	5	4	2	2	1	1	1

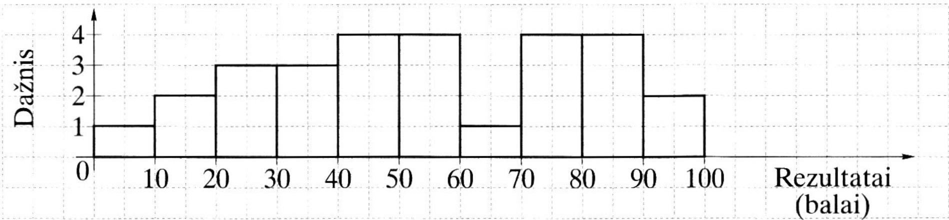


Pastaba

Sąlygą reikėtų papildyti, kad išlaidos nurodytos litais.

328. Sprendžiant uždavinius 325–327, buvo nurodyta, į kokio ilgio intervalus reikia grupuoti duomenis. Sprendžiant uždavinius 328 ir 329 mokiniams patiems reikia pasirinkti intervalo ilgį. Kaip tai padaryti? Ypatingos teorijos čia nėra, bet paprastai pasirenkama nuo 5 iki 15 intervalų. Jų ilgiai turi būti vienodi, kiekviena reikšmė priskiriama tik vienam intervalui. Taip pat galima susitarti grupuojant duomenis imti atvirus intervalus iš dešinės. Nors galima imti ir atvirus iš kairės. Vadovėlyje visur naudoti atviri iš dešinės intervalai, todėl galima tos tvarkos ir laikytis. Žinoma, grupuojant duomenis prarandama dalis informacijos. Jos prarandama mažiau, jei grupavimo intervalų skaičius yra didesnis. Todėl galima pasiūlyti mokiniams nubrėžti dvi, tris historgamas, vaizduojančius tuos pačius duomenis, pasirinkus skirtingus intervalų ilgius ir aptarti, kuri diagrama geriau juos atspindi.
Čia iš viso pateikti 28 duomenys. Mažiausias duomuo — 9, didžiausias — 93. Sugrupuokime šiuos duomenis, parinkę intervalo ilgį, lygų 10:

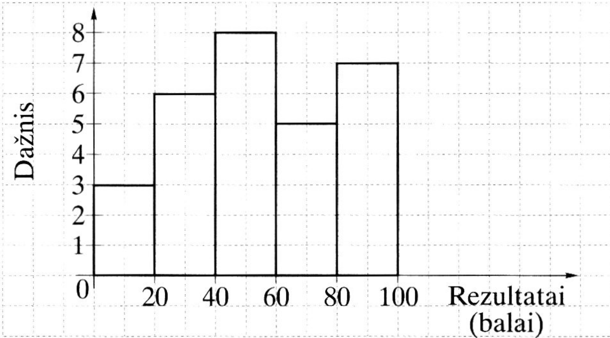
Intervalas	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)
Dažnis	1	2	3	3	4	4	1	4	4	2



Pažiūrėkime, kaip pasikeistų histograma, jei intervalo ilgį padidiintume iki 20. Tuomet intervalų bus mažiau — tik 5:

Intervalas	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100]
Dažnis	3	6	8	5	6

Histograma dabar atrodys taip:

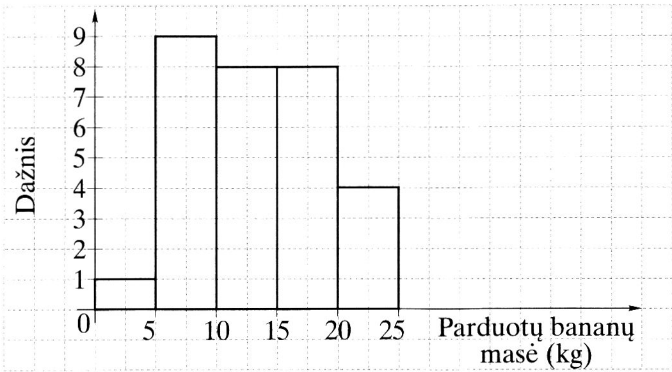


Nesunku pastebėti, kad pirmoji diagrama turimus duomenis vaizduoja tiksliau, ji yra informatyvesnė, nors abi histogramos yra priimtinos.

329. Sprendžiame panašiai kaip ir užd. 328.
Iš viso yra 30 duomenų. Mažiausias duomuo — 3, didžiausias — 22.
Duomenys yra intervale [3; 22]. Vietoj jo galima imti intervalą [0; 25] ir sugrupuoti duomenis į 5 intervalus:

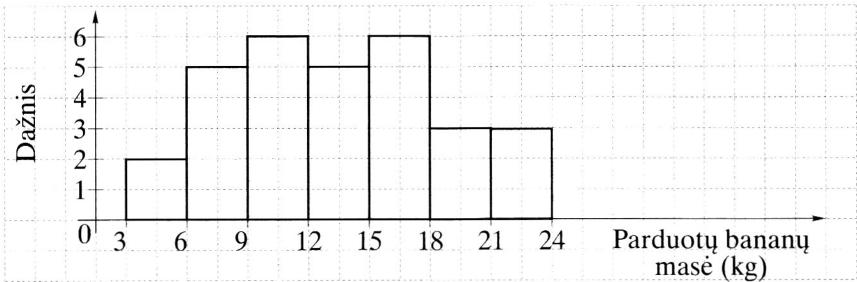
Intervalas	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25]
Dažnis	1	9	8	8	4

Pagal ją nubraižome histogramą.



Pasirinkę intervalo ilgį lygų 3, gauname tokią lentelę ir histogramą.

Intervalas	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24]
Dažnis	2	5	6	5	6	3	3



14.3. Skaitinės duomenų charakteristikos

Mokiniai turi mokėti apskaičiuoti imties skaitines charakteristikas — vidurkį, dispersiją, modą, medianą, kvartilius. Skaičiuojama pagal formules ir paaiškinimus, pateiktus teorinėje vadovėlio dalyje. Skyrelyje pateikta labai daug uždavinių, todėl mokytojas darbą gali individualizuoti, skirdamas mokiniams skirtingas užduotis.

Nors daugeliui mokinių ši tema nėra (ir, matyt, niekada nebus) reikalinga, mokytojams vadovėlyje pateiktą teorinę madžiagą apie kvartilius, papildysime.

- Skaičius, už kurį yra *ne didesni* ne mažiau kaip ketvirtadalis duomenų ir *ne mažesni* ne mažiau kaip trys ketvirtadaliai duomenų, vadinamas ***pirmuoju kvartiliu***.
- Skaičius, už kurį yra *ne didesni* ne mažiau kaip pusė duomenų ir *ne mažesni* ne mažiau kaip pusė duomenų, vadinamas ***antruoju kvartiliu*** arba ***mediana***.
- Skaičius, už kurį *ne didesni* ne mažiau kaip trys ketvirtadaliai duomenų ir *ne mažesni* ne mažiau kaip ketvirtadalis duomenų, vadinamas ***trečiuoju kvartiliu***.

Ieškodami kvartilių, imtį suskirstome į ketvirtadalius. Paprasčiausias atvejis, kai duomenų skaičius yra 4-ių kartotinis, t. y. kai imtyje yra 4, 8, 12, 16, ... duomenų. Pavyzdžiui,

5, 5 | 6, 8, | 8, 8, | 9, 10

$Q_1 = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$ $\quad Q_2 = 8 \quad Q_3 = 8{,}5$

Kai duomenų skaičius yra nedalus iš 4, tai skaičiavimas ketvirčiais pasidaro sudėtingesnis. Pavyzdžiui, kai turime 15 duomenų, tai lygiai ketvirtadalį sudaro $15 : 4 = 3{,}75$. Tai reiškia, kad pirmasis kvartilis yra skaičius ne mažesnis už 4-ąjį (iš kairės) duomenį. Tas skaičius turi būti ir *ne didesnis* už ne mažiau kaip tris ketvirtadalius duomenų ($15 : 4 \cdot 3 = 11{,}25$), tai jis yra ne didesnis už 12-ąjį (iš dešinės) duomenį. Paaiškinsime tai tokiu pavyzdžiu:

3,75
① ② ③ | ④
4, 5, 6, | **6**, | 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10
⑫ ⑪ ⑩ ⑨ ⑧ ⑦ ⑥ ⑤ ④ ③ ② ①
11,25

4-asis iš kairės ir 12-tasis iš dešinės yra tas pats duomuo. Vadinasi $Q_1 = 6$.

Bet tokie samprotavimai bendram kursui tikrai yra per sunkūs. Todėl kartais kvartilių ieškome, galvodami ne ketvirtadaliais, o pusėmis:

1) Randame medianą.
2) Randame „apatinės duomenų pusės“ medianą — pirmąjį kvartilį.
3) Randame „viršutinės duomenų pusės“ medianą — trečiąjį kvartilį.

Nors toks metodas ne visada duoda tikslų atsakymą, bet yra tikrai pakankamas atvejams, nagrinėjamiems šiame vadovėlyje.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 330a–d.
Vidutinis lygmuo: 330e–g, 331–334.
Aukštesnysis lygmuo: 336–338.

330. a) Apskaičiuojame vidurkį:

$$\bar{x} = \frac{2+3+3+4+5+8+12+17+20}{9} \approx 8{,}22;$$

dispersiją:

$$s^2 = \frac{(2-8{,}22)+(3-8{,}22)^2+(3-8{,}22)^2+(4-8{,}22)^2+(5-8{,}22)^2+(8-8{,}22)^2+(12-8{,}22)^2+(17-8{,}22)^2+(20-8{,}22)^2}{9} \approx 43{,}96.$$

Moda — dažniausiai pasikartojanti duomenų reikšmė: Mo = 3.
Kadangi duomenų skaičius yra nelyginis — 9, tai mediana lygi viduriniojo variacinės eilutės nario reikšmei Md = 5.
Mediana tarsi „atkerta“ pusę imties duomenų:
2, 3, 3, 4, **5**, 8, 12, 17, 20.
Šiuo atveju duomenų „apatinė pusė“ bus 2, 3, 3, 4, **5**, o „viršutinė pusė“ — **5**, 8, 12, 17, 20, t. y., kai duomenų skaičius nelyginis, mediana priklauso abiems pusėms.
Pirmasis kvartilis Q_1 yra „apatinės duomenų pusės“ moda, o trečiasis kvartilis Q_3 yra „viršutinės duomenų pusės“ moda. Tai mūsų nagrinėjamu atveju:
apatinė duomenų pusė yra — 2, 3, $\underline{3}$, 4, 5, todėl $Q_1 = 3$;
viršutinė duomenų pusė yra — 5, 8, $\underline{12}$, 17, 20, todėl $Q_3 = 12$.

Pastaba
Atkreipiame dėmesį, kad a) ir b) dalyse yra nelyginis, c) ir d) dalyse — lyginis duomenų skaičius, o tai turi įtakos, skaičiuojant modas ir kvartilius. Todėl reiktų spręsti, pavyzdžiui, a) ir c) arba b) ir d) dalis. Uždavinio e), f) ir g) dalyse duomenys neišdėstyti į variacinę eilutę, todėl svarbu, kad mokiniai tai pastebėtų ir pirmiausiai duotuosius duomenis išdėstytų nuo mažiausio iki didžiausio.

c) Detaliau panagrinėsime medianos ir kvartilių skaičiavimus.

Kadangi duomenų skaičius lyginis, tai mediana lygi dviejų viduriniųjų variacinės eilutės 3, 3, 3, 4, 5, 8, 11, 14, 15, 17 duomenų reikšmių aritmetiniam vidurkiui:

$\text{Md} = \frac{5+8}{2} = 6{,}5$.

Apatinė duomenų pusė yra 3, 3, **3**, 4, 5 (nelyginis skaičius), tai $Q_1 = 3$;

viršutinė duomenų pusė yra 8, 11, **14**, 15, 17, tai $Q_3 = 14$.

e) Duomenų yra nelyginis skaičius — 17. Pirmiausia duomenis surašomi didėjimo tvarka:

Apatinė pusė

1, 2, 3, 6, **6**, 7, 12, 12, (12), 15, 15, 15, **19**, 21, 24, 30, 52

Viršutinė pusė

$\text{Md} = 12$; $Q_1 = 6$; $Q_3 = 19$.

f) ir **g)** dalyse duomenų skaičius yra lyginis — 10.

g) Parodysime, kaip randame Md, Q_1 ir Q_3 su g) dalies duomenimis. Sudarome variacinę duomenų eilutę (išrikiuojame duomenis didėjančia tvarka):

Viršutinė duomenų pusė

3,4; 3,4; **3,7**; 4,7; 5,0; 5,1; 5,4; **5,7**; 6,4; 8,5

Apatinė duomenų pusė

$\text{Md} = \frac{5{,}0+5{,}1}{2} = 5{,}05$; $Q_1 = 3{,}7$; $Q_3 = 5{,}7$.

Atsakymai.

	Vidurkis $\bar{x}$	Dispersija s^2	Moda Mo	Mediana Md	Pirmasis kvartilis Q_1	Trečiasis kvartilis Q_3
a)	8,22	43,96	3	5	3	12
b)	29,09	1618,29	110	13	9,5	17
c)	8,3	30,25	3	6,5	3	14
d)	12,58	41,54	6	12	6	19,5
e)	14,82	155,53	12 ir 15	12	6	19
f)	4,5	6,1	4,6	4,6	2,5	7,5
g)	5,13	2,4	3,4	5,05	3,7	5,7

331. Surašome duomenis didėjimo tvarka:

100; 110; 116; 118; 120; 122; 124; 125; 127; 127; 129; 130; 131; 132; 133; 133; 134; 136; 138; 146.

$\text{Md} = \frac{127+129}{2} = 128$; $Q_1 = \frac{120+122}{2} = 121$; $Q_3 = \frac{133+133}{2} = 133$.

Atsakymai. $\bar{x} = 126{,}55$; $s^2 = 107{,}41$; Mo = 127 ir 133; Md = 128; $Q_1 = 121$; $Q_3 = 133$.

332. Variacinė duomenų eilutė:

0; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 8; 8; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 13; 14; 15; 15; 20; 33.

Atsakymai. $\bar{x} = 9{,}21$; $s^2 = 31{,}82$; Mo = 8; Md = 8; $Q_1 = 5$; $Q_3 = 13$.

333. Čia duomenys pateikti lentele, tai vidurkį skaičiuojame taip: duomenų reikšmes dauginame iš atitinkamo dažnio ir sudedame, o gautą sumą dalijame iš duomenų skaičiaus.

Iš viso duomenų yra $2 + 7 + 8 + 12 + 20 + 10 + 6 + 5 = 70$

(arba $6 + 8 + 14 + 17 + 12 + 7 + 6 = 70$).

Apskaičiuokime matematikos įvertinimų vidurkį:

$\bar{x}_{\text{Mat.}} = \frac{3\cdot2+4\cdot7+5\cdot8+6\cdot12+7\cdot20+8\cdot10+9\cdot6+10\cdot5}{70} \approx 6{,}71$.

Apskaičiuokime lietuvių kalbos įvertinimų vidurkį:

$\bar{x}_{\text{Liet.k.}} = \frac{3\cdot0+4\cdot6+5\cdot8+6\cdot14+7\cdot17+8\cdot12+9\cdot7+10\cdot6}{70} \approx 6{,}94$.

Atsakymas. $\bar{x}_{\text{Mat.}} \approx 6{,}71$, $\bar{x}_{\text{Liet.k.}} \approx 6{,}94$.

Pastaba

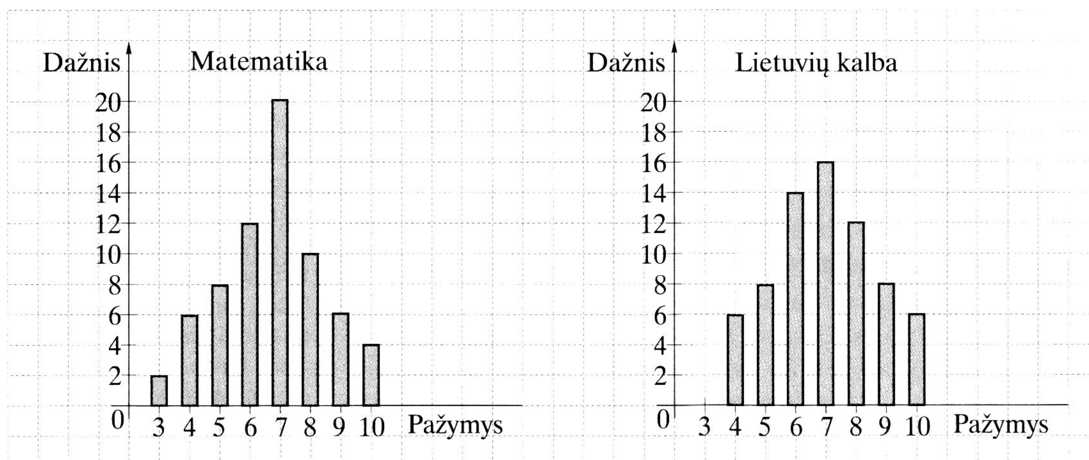
Galima parodyti mokiniams, kaip apskaičiuoti vidurkį, naudojant skaičiuoklį, kuriame yra mygtukai statistikos dydžiams skaičiuoti.

Pirmiausia reikia įjungti statistikos dydžių mygtukus — paspausti 2ndF ir STAT pažymėtą mygtuką (ekrane turi pasirodyti užrašas STAT).

Skaičiuojant imties vidurkį, vieną po kito įvedame duomenis, po kiekvieno paspausdami mygtuką DATA (duomenys). Įvedus paskutinį skaičių, spaudžiame mygtuką $\bar{x}$ ir ekrane matome vidurkio rezultatą.

Pastaba

Braižant abi diagramas, geriau imti vienodus mastelius, tuomet rezultatus galima vaizdžiau palyginti.



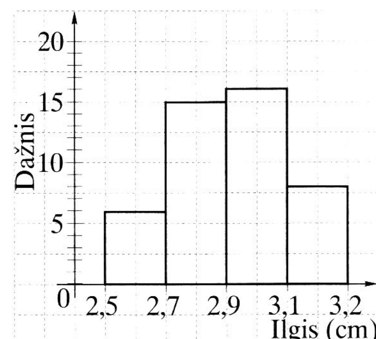
334. Apskaičiuojame vidurkį:

$$\bar{x} = \frac{2{,}5\cdot2+2{,}6\cdot4+2{,}7\cdot7+2{,}8\cdot8+2{,}9\cdot10+3{,}0\cdot6+3{,}1\cdot5+3{,}2\cdot3}{2+4+7+8+10+6+5+3} \approx 2{,}9.$$

Prašoma duomenis sugrupuoti į 4 intervalus. Reikia nustatyti, kokio ilgio turi būti intervalai. Mažiausias duomuo 2,5, didžiausias 3,2, tai $\frac{3{,}2-2{,}5}{4} = 0{,}175 \approx$ $\approx 0{,}2$. Todėl intervalo ilgį pasirenkame 0,2.

Atsakymas. $\bar{x} \approx 2{,}9$.

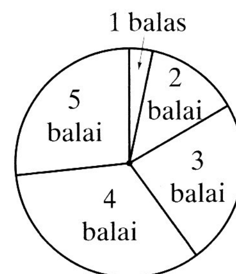
Intervalas	[2,5; 2,7)	[2,7; 2,9)	[2,9; 3,1)	[3,1; 3,2)
Dažnis	6	15	16	8



335. Randame išpjovos kampo didumus ir papildome duotąją lentelę.
1 balą atitiks kampas, lygus: 360° : 30 = 12°.

Įvertinimas	1	2	3	4	5
Dažnis	1	4	7	10	8
Išpjovos kampo didumas	12°	48°	84°	120°	96°

Atsakymas. $\bar{x} = 4$.

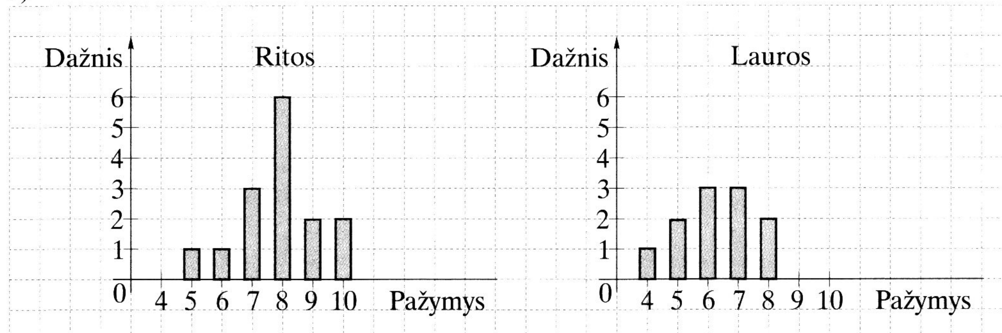


336. Sudarykime duomenų variacines eilutes:
Rita: 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10 (15 duomenų);
Laura: 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8 (11 duomenų).
Atsakymai.

1)

Pažymys	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis (Rita)	–	1	1	3	6	2	2
Dažnis (Laura)	1	2	3	3	2	–	–

2), 3) Ritos: $\bar{x}_2 \approx 7{,}87$; $s^2 \approx 1{,}84$; Mo = 8; Md = 8; $Q_1 = 7$; $Q_3 = 9$.
Lauros: $\bar{x}_1 \approx 6{,}27$; $s^2 \approx 1{,}62$; Mo = 6 ir 7; Md = 6; $Q_1 = 5$; $Q_3 = 7$.
4) Aukštesni Ritos rezultatai, stabilesni — Lauros.
5)



Pastaba

Patartina y ašyje imti tą patį mastelį ir aptarti su mokiniais, kaip diagrama iliustruoja rezultatų stabilumą ir ar matome, kieno rezultatai aukštesni.

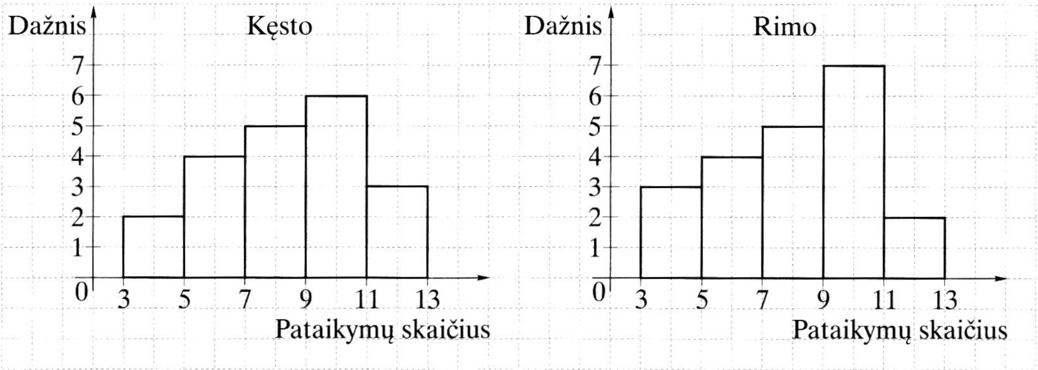
337. **1)** Kęsto: $\bar{x} \approx 7{,}9$, $s^2 = 6{,}62$; Rimo: $\bar{x} \approx 7{,}75$, $s^2 = 5{,}57$.
Kęsto rezultatai aukštesni, nes didesnis vidurkis, Rimo rezultatai stabilesni, nes mažesnė dispersija.

2)

	Mo	Md	Q_1	Q_3
Kęsto	7, 9 ir 10	8	6	10
Rimo	9	8	6,5	9,5

3)

Pataikymų skaičius	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)
Dažnis (Kęsto)	2	4	5	6	3
Dažnis (Rimo)	3	2	6	7	2



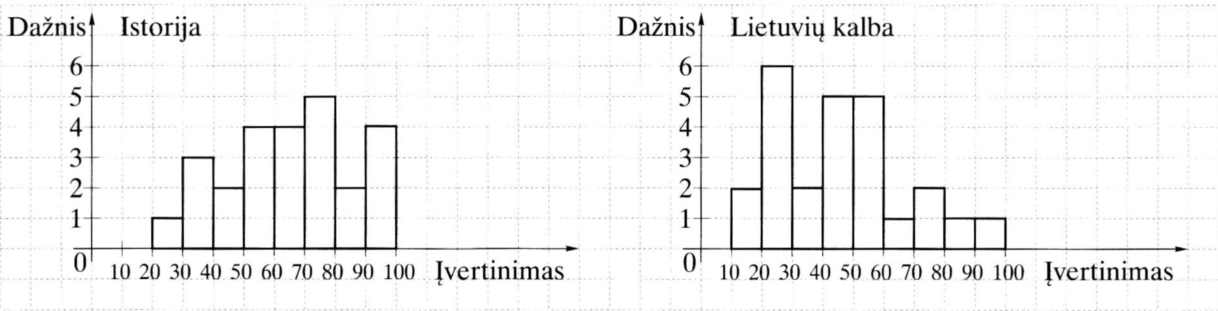
338. **1)** Istorija: $\bar{x} \approx 65{,}04$, $s^2 \approx 460{,}7$;
Lietuvių kalba: $\bar{x} \approx 45{,}6$, $s^2 \approx 461{,}4$.

2)

Istorija	75	68	51	75
Lietuvių kalba	51	45	29	51

3)

Intervalas	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)
Dažnis (istorija)	–	1	3	2	4	4	5	2	4
Dažnis (lietuvių k.)	2	6	2	5	5	1	2	1	1



4) Istorijos egzamino rezultatai aukštesni — vidurkis lygus 65,04; lietuvių kalbos — žemesni, vidurkis lygus 45,6.
Tiek istorijos, tiek lietuvių kalbos rezultatų dispersijos yra panašaus dydžio — 460,7 ir 461,4. Tai rodo, kad abiem atvejais duomenų nutolimas nuo vidurkio yra panašus.

339. Šį pratimą galima spręsti, padalijus mokinius grupėmis, bet galima jį atlikti ir vienam, kartojant nurodytą bandymą 4–5 kartus.

Nagrinėjamuose pratimuose mokiniai objekto dviejų požymių priklausomumą ar nepriklausomumą turi paaiškinti, remdamiesi duomenų vaizdu koordinačių plokštumoje. Jei spręsite Nr. 346, apgalvokite, kaip padėti mokiniams surinkti duomenis — gal reiktų sudaryti lentelę su visais duomenimis, apie kuriuos kalbama, o tada paskirti, kas kurią dalį nagrinėja ir pan. Tai vėl gi gali būti projektinis darbas, kuriam atlikti reikia skirti ilgesnį laiką.

Mokiniai turėtų:

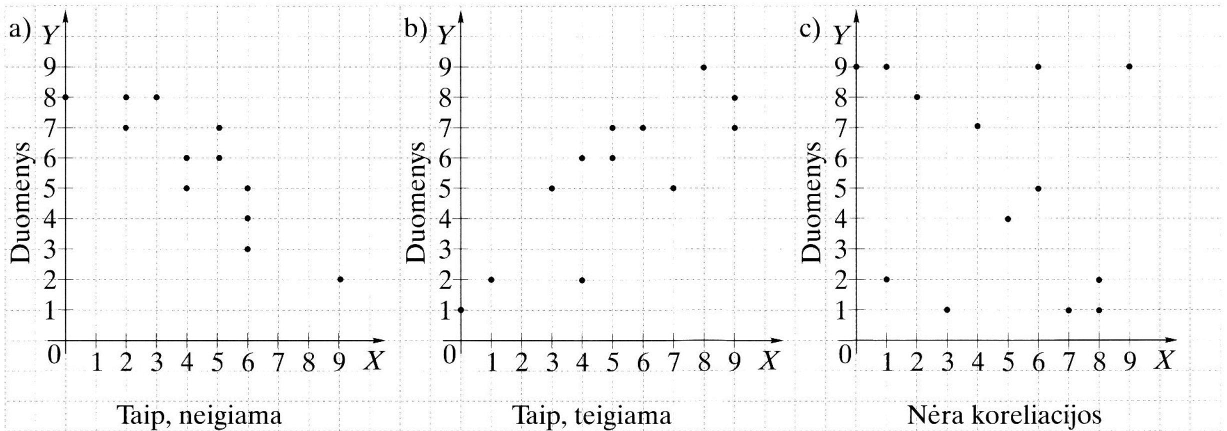
- paprastais atvejais *suprasti ir paaiškinti* objekto požymių priklausomumą ir nepriklausomumą;
- *suvokti* koreliaciją kaip tam tikrų požymių priklausomumo matą.
- *mokėti* įvertinti koreliacijos teigiamumą ar neigiamumą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 340, 341, 343.
Vidutinis lygmuo: 342, 344, 345.
Aukštesnysis lygmuo: 346.

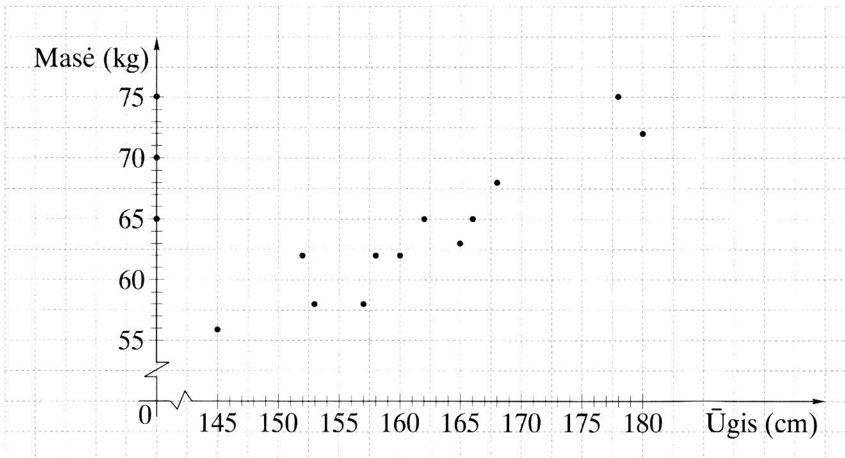
340. **a)** Yra, teigiamas; **b)** nėra; **c)** nėra, nes duomenys grupuojasi ne apie pasvirąją tiesę; **d)** yra, neigiamas; **e)** nėra; **f)** yra, teigiamas.

341.



342. Mažiausia ūgio reikšmė 145 cm, didžiausia — 178 cm; mažiausia svorio reikšmė 56 kg, didžiausia — 75 kg.

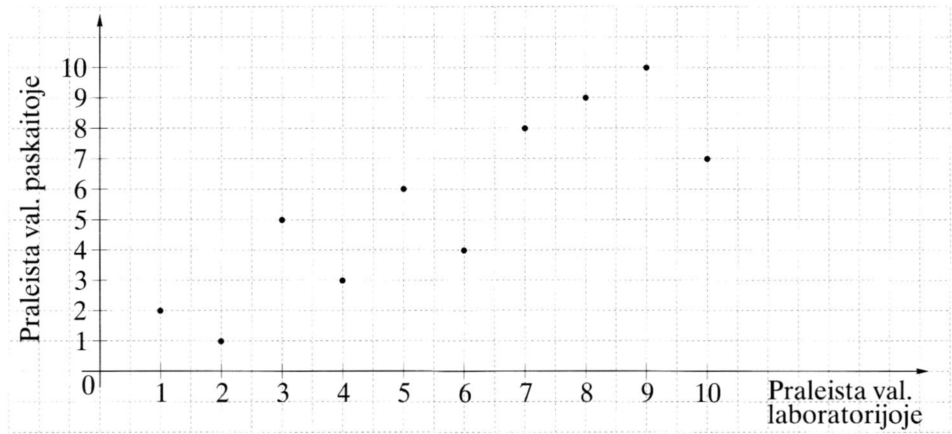
Atsakymas. Požymiai koreliuoti teigiamai.



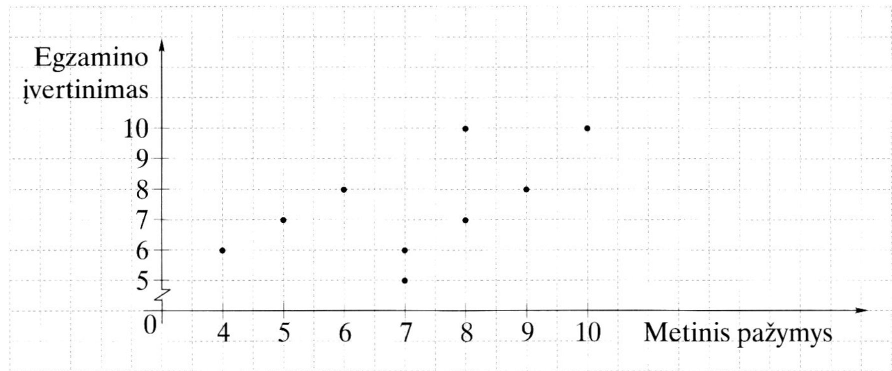
Patarkite mokiniams

Pirmiausia reikia atkreipti dėmesį į didžiausią ir mažiausią X ir Y reikšmes, tinkamai parinkti mastelius x ir y ašyse. Taip pat paminėkite, kad x ir y ašyse (vienoje ar abiejose) duomenis pradedame atidėti nebūtinai nuo nulio (žr. pavyzdžius vadovėlyje).

343. Požymiai yra koreliuoti teigiamai.

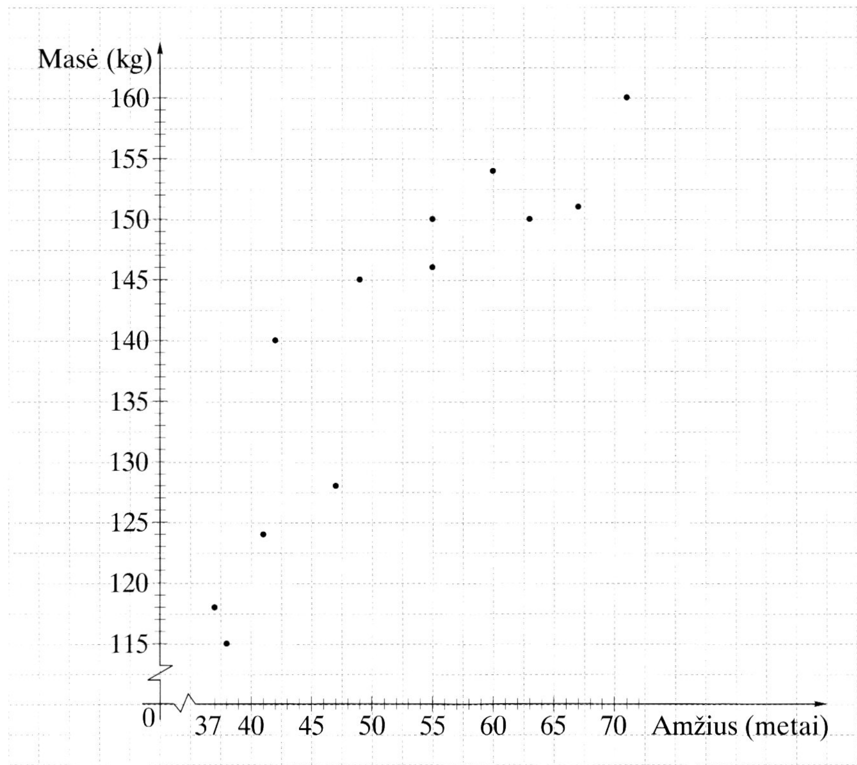


344. Požymiai yra teigiamai koreliuoti.



345. Mažiausia amžiaus reikšmė — 37, didžiausia — 71.
Mažiausia kraujospūdžio reikšmė — 115, didžiausia — 160.

Atsakymas. Yra teigiama koreliacija.



14.5. Geometrijos uždaviniai

Sprendžiant šio skyrelio uždavinius, reikia pakartoti trapecijos ploto formulę, ploto vienetų sąryšius, įbrėžtinio ir apibrėžtinio keturkampių savybes; prisiminti, kaip skaičiuojamas plotas mastelio uždaviniuose.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Minimalus lygmuo: 347–349.

347. a) Trapecijos plotas

$$S_{\text{tr}} = \frac{4+6}{2} \cdot 6 = 30\,\text{cm}^2.$$

$$S_{\text{realus}} = 30 \cdot (10\,000)^2\ \text{cm}^2 = 3\,000\,000\,000\,\text{cm}^2 = 300\,000\,\text{m}^2 =$$
$$= 3000\,\text{a} = 30\,ha.$$

b) $ED = AD - BC = 6 - 4 = 2\,\text{cm}$.
Pagal Pitagoro teoremą $\triangle CED$:

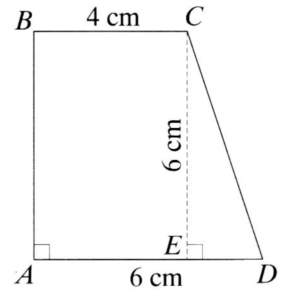
$$CD = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\,\text{cm}.$$

Kadangi tai realaus turinio uždavinys, skaičiuodami realų kraštinės CD ilgį, imsime apytikslę jos reikšmę $2\sqrt{10} \approx 6{,}3\,\text{cm}$.
Tada

$$P_{\text{trap.}} = 6 + 4 + 6{,}3 + 6 = 22{,}3\,\text{cm}.$$

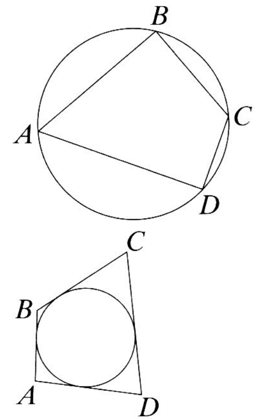
$$P_{\text{realus}} = 22{,}3 \cdot 10\,000\,\text{cm} = 223\,000\,\text{cm} = 22\,300\,\text{m} = 22{,}3\,\text{km}.$$

Atsakymai. **a)** $3000\,\text{a} = 30\,\text{ha}$; **b)** $22{,}3\,\text{km}$.



Priminkite mokiniams
Trapecijos plotas:
$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot CE$.
Ploto vienetų sąryšiai:
$1\,\text{m}^2 = 100\,\text{cm} \times 100\,\text{cm} = 10\,000\,\text{cm}^2$
$1\,\text{a} = 10 \times 10 = 100\,\text{m}^2$
$1\,\text{ha} = 100\,\text{m} \times 100\,\text{m} = 10\,000\,\text{m}^2$
$1\,\text{ha} = 100\,\text{a}$

348. Turime, kad $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$.
Vieną santykio dalį pažymime x, tai $\angle A = 2x$, $\angle B = 3x$, $\angle C = 4x$. Įbrėžtinio keturkampio priešingųjų kampų dydžių sumos yra lygios, todėl $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$, $2x + 4x = 3x + \angle D$, $\angle D = 3x$.
Keturkampio kampų suma lygi 360°, tai $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.
$2x + 3x + 4x + 3x = 360$, $12x = 360$, $x = 30$, $\angle D = 3x = 3 \cdot 30 = 90°$.
Atsakymas. 90°.



349. Turime, kad $AB : BC : CD = 2 : 3 : 4$.
Vieną santykio dalį pažymime x, tai $AB = 2x$, $BC = 3x$, $CD = 4x$. Kadangi apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios, tai
$AB + CD = BC + AD$, $2x + 4x = 3x + AD$, $AD = 3x$.
Kadangi $P_{ABCD} = 72\,\text{cm}$ (duota), tai
$2x + 4x + 3x + 3x = 72$, $12x = 72$, $x = 6$.
$AD = 3x = 3 \cdot 6 = 18\,\text{cm}$.
Atsakymas. 18 cm.

KARTOJIMO UŽDUOTYS

I variantas.

1. Su kuria x reikšme $\log_x 4 = -2$?

A 2 **B** -2 **C** $\sqrt{2}$ **D** $\frac{1}{4}$ **E** $\frac{1}{2}$

2. Suprastinkite reiškinį ir apskaičiuokite jo reikšmę, kai $a = \frac{5}{7}$, $b = 0{,}2$.

$$a \cdot \log_2 \frac{1}{4} - b \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} + a \cdot b$$

3. Kam lygus reiškinys $4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9$?

A 36^{13} **B** 36^{36} **C** 13^{13} **D** 13^{36} **E** 26^{13}

4. Didžiausias sveikasis nelygybės $3 - 4x > 6$ sprendinys yra

A 0 **B** -1 **C** 1 **D** -2 **E** 3

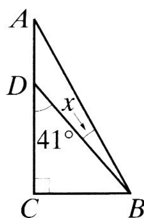
5. Ką reikia įrašyti vietoje klaustuko

$$\frac{1-b}{1+b} = \frac{1-b^2}{?}$$

A $1+b$ **B** $1+b^2$ **C** $1-b^2$ **D** $(1+b)^2$ **E** $(1-b)^2$

6. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio $\frac{3}{\sqrt{-x^2+25}}$ reikšmė lygi 1?

7. Stataus trikampio ABC $\angle A = 29°$. Raskite kampą x.



8. Pernai kelnės kainavo 160 Lt, o megztukas 40 Lt. Šiemet kelnės pabrango 5%, o megztukas pabrango 10%. Keliais procentais pabrango komplektas sudarytas iš kelnių ir megztuko?

9. Kurios iš lygčių neturi sprendinių?

1) $x^2 - 15 = \sqrt{2}$; 2) $x^2 + 15 = 4$; 3) $\log_x(3 - \sqrt{10}) = x$; 4) $\log_2 x = -9$; 5) $\sqrt{x-3} = 1 - \sqrt{3}$.

10. Kūgio formos Buratino kepurės aukštis lygus 30 cm, o pagrindo apskritimo ilgis — 54 cm. Koks tos kepurės išorinio paviršiaus plotas? (Atsakymą parašykite 0,1 cm^2 tikslumu.)

11. Raskite funkcijos $f(x) = (\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1) \cdot x$ išvestinę.

12. Motorinė valtis, kurios greitis stovinčiame vandenyje lygus 20 km/h, upe nuplaukė 60 km ir apsisukusi grįžo atgal. Iš viso kelionėje valtis užtruko 6 h 15 min. Koks yra upės tėkmės greitis?

13. Kamuolys, mestas vertikaliai aukštyn, po t sekundžių pakilo į aukštį $h(t) = 4{,}1 + 29{,}4t - 4{,}9t^2$ (metrais). Apskaičiuokite kamuolio greitį po 1 s.

14. Jonas tris kartus meta monetą ir stebi, kuria puse į viršų ji atvirsta. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:

A — visus tris kartus atvirto skaičius;
B — visus tris kartus atvirto herbai;
C — pirmą metimą atvirto herbas, kitus du — skaičius.

15. Dešimt biologų tikrino sėklų daigumą. Kiekvienas jų pasėjo po 20 sėklų. Sudygusių sėklų skaičiai buvo tokie: 15, 18, 17, 14, 19, 20, 16, 17, 18, 15. Koks sėklų daigumo procentas?

II variantas.

1. Apskaičiuokite reiškinio $(2-\sqrt{5})\cdot(2+\sqrt{5})$ reikšmę.

A 9 **B** 1 **C** $-\sqrt{5}$ **D** -1 **E** 3

2. Suprastinkite reiškinį ir apskaičiuokite jo reikšmę, kai $a = 2\frac{1}{4}$, $b = \frac{2}{7}$.

$$(\sqrt{8a}-b)\cdot(\sqrt{8a}+b)+\sqrt{b^4}$$

3. Kam lygus reiškinys $\frac{15^{30}}{45^{15}}$?

A $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ **B** 5^{15} **C** $\left(\frac{15}{45}\right)^{45}$ **D** 5^{30} **E** 3^{15}

4. Skaičius $a<0$, skaičius $b>0$. Kuris iš duotų skaičių yra didžiausias?

A $\frac{b+5}{a}$ **B** $\frac{a}{b}$ **C** $\frac{b-a}{5}$ **D** $\frac{5}{a-b}$ **E** $\frac{a}{b+6}$

5. Kurie iš duotųjų reiškinių:

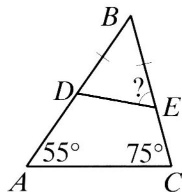
a) $(1-2a)^2$; b) $(-2a-1)^2$; c) $4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$; d) $2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$,

yra lygūs reiškiniui $(2a-1)^2$?

A a) ir c) **B** a) ir b) **C** b) ir c) **D** b) ir d) **E** nė vienas iš duotųjų

6. Su kuriomis x reikšmėmis turi prasmę reiškinys $\frac{3}{\sqrt{-x^2+25}}$?

7. Apskaičiuokite kampo DEB dydį, jei $\angle A = 55°$, $\angle C = 75°$, $DB = EB$.



8. Šeima investavo į verslą 4000 litų. Už dalį pinigų sutartos 10% metinės palūkanos, už likusius pinigus sutarta 20% palūkanų. Metų pabaigoje šeima gavo 460 litų palūkanų. Kiek pinigų buvo investuota už 10% ir kiek už 20% palūkanų?

9. Kurios iš lygčių neturi sprendinių?

1) $\sin x = 0{,}93$; 2) $\sin x = 1-\sqrt{2}$; 3) $\cos x = \frac{\pi}{2}$; 4) $\mathrm{tg}(x+2)=0$; 5) $\cos x = \frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$.

10. Pirmojo puodo aukštis yra 16 cm, o dugno skersmuo — 18 cm. Antrojo puodo aukštis yra 18 cm, o dugno skersmuo — 16 cm. Į kurį puodą telpa daugiau vandens? Keliais procentais daugiau?

11. Apskaičiuokite $f'(-1)$, kai $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + (x-2)$.

12. Tuo pačiu metu iš skirtingų miestų vienas priešais kitą išvažiuoja du automobiliai. Atstumas tarp miestų lygus 350 km. Automobiliai susitiko po 2 valandų. Automobilių greičių santykis lygus 3 : 4. Apskaičiuokite abiejų automobilių greičius,

13. Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos $f(x) = 1+3x-3x^3$ reikšmę intervale $[0; 2]$.

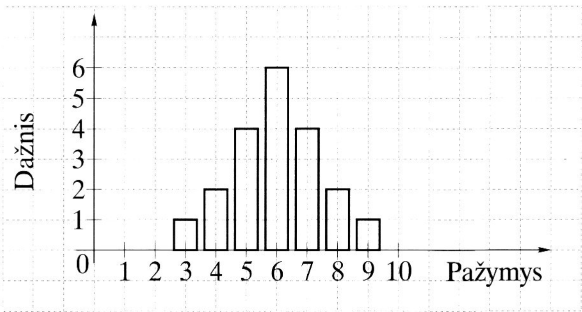
14. Dėžutėje yra penkios kortelės, sunumeruotos skaičiais 1, 2, 3, 4, 5. Iš tos dėžutės nežiūrint traukiamos dvi kortelės. Raskite tikimybes įvykių:

A — abiejų kortelių numeriai yra lyginiai;
B — abiejų kortelių numeriai yra nelyginiai;
C — kortelių numerių suma lygi 8.

15. Rimas surašė per metus gautus matematikos pažymius:

8, 8, 10, 9, 3, 3, 2, 4, 5, 9, 10, 8, 4, 3, 2, 8, 10, 3, 5, 6.

Agnė savo matematikos pažymius pavaizdavo stulpeline diagrama.



1) Sudarykite Rimo ir Agnės pažymių dažnių lenteles.
2) Raskite abiejų mokinių pažymių vidurkius ir medianas.

Matematika 11–12. Bendrasis kursas
Mokytojo knyga

2007 12 22. 10 sp. l. Užs. Nr. 262
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius
Spausdino UAB „Petro ofsetas“
Žalgirio g. 90, LT-09303 Vilnius

Šią mokytojo knygą rengė:
Jolanta Knyvienė, Milda Vosylienė ir Elmundas Žalys.

Knyga skiriama mokytojui, dėstančiam matematiką XI–XII klasėse pagal vadovėlį „Matematika 11–12. Bendrasis kursas“.

Mokytojo knygos struktūra tokia pat, kaip ir vadovėlio. Čia rasite:

- patarimus ir pastabas kiekvienam vadovėlio skyreliui;
- uždavinių sprendimus, komentarus ir atsakymus;
- kurso kartojimo užduotis.

Knyga naudinga ne tik mokytojams, bet ir moksleiviams bei jų tėvams...


ISBN 978-9955-680-88-8
9 789955 680888